1. Introduction

LIMITES DE SUITES BORNÉES DE POLYNÔMES

par Michel SAVOYANT

NOTATIONS

- $\mathbf{C}$ désigne le plan complexe; si $F \subset \mathbf{C}$, ∂F est la frontière de F, $\bar{F}$ l'adhérence de F.
- $\Delta(z_0, r)$ est le disque ouvert de centre z_0 et de rayon $r > 0$. On notera $\Delta = \Delta(0, 1)$.
- Si f est une fonction complexe bornée définie sur F on note $\|f\|_F = \sup_{z \in F} |f(z)|$.

Soit G un ouvert borné de $\mathbf{C}$.

- $H^\infty(G)$ est l'algèbre de Banach des fonctions analytiques bornées sur G avec la norme $\|f\|_G$.
- $A(G)$ est l'algèbre uniforme des fonctions continues sur $\bar{G}$ et analytique dans G.

1. INTRODUCTION

Soit G un ouvert borné de $\mathbf{C}$ et B un sous-ensemble de $H^\infty(G)$: on note $B(G)$ l'ensemble des fonctions de $H^\infty(G)$ qui sont limites ponctuelles sur G d'une suite bornée d'éléments de B; nous nous intéressons au problème suivant: quand $B(G)$ est-il fermé dans $H^\infty(G)$? Lorsque $B = A(G)$ ou (avec une hypothèse supplémentaire sur ∂G) lorsque B est l'ensemble des fractions rationnelles avec pôles hors de $\bar{G}$, A. M. Davie ([3]) a montré que $B(G)$ est fermé dans $H^\infty(G)$; nous étudions ici le cas où $B = P$, l'algèbre des polynômes. Rubel et Shields ([7] th 4.1) ont montré qu'en général $P(G)$ n'est pas fermé dans $H^\infty(G)$; dans ce travail nous donnons une condition géométrique nécessaire et suffisante pour que $P(G)$ le soit lorsque G est connexe. Avant d'énoncer le résultat principal nous donnons deux définitions.

1.1. *Définition.* Soit Ω un ouvert borné de **C**. L'enveloppe de Carathéodory de Ω est l'intérieur du complémentaire de la composante connexe non bornée du complémentaire de $\bar{\Omega}$. On note Ω^* cet ouvert.

1.2. *Définition.* Soit Ω un ouvert de **C** et S un sous-ensemble ouvert de Ω; un point $\zeta \in \partial\Omega$ est dit accessible (resp. accessible à partir de S) s'il existe un chemin continu $z = \gamma(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ tel que: $\gamma(t) \in \Omega$ (resp. $\in S$) pour $t \in [0, 1[$ et $\gamma(1) = \zeta$.

Nous démontrons le théorème suivant:

1.3. THÉORÈME. *Soient G un ouvert* connexe *borné de* **C**, *G^* son enveloppe de Carathéodory, U la composante connexe de G^* contenant G, et $G' = U \setminus \bar{G}$ Alors $P(G)$ est fermé dans $H^\infty(G)$ si et seulement si l'ensemble des points de ∂U accessibles à partir de G' est au plus dénombrable.*

Nous aurons à utiliser le théorème suivant qui caractérise les éléments de $P(G)$: (cf. [5], p. 151 ou [7] pour une démonstration).

1.4. THÉORÈME. *Une fonction $f \in H^\infty(G)$ est dans $P(G)$ si et seulement s'il existe une fonction $F \in H^\infty(G^*)$ tel que $F \equiv f$ sur G.*

Nous donnerons aussi des conditions suffisantes, portant seulement sur G^*, pour que $P(G)$ soit fermé dans $H^\infty(G)$.

2. ENSEMBLES DOMINANTS

2.1. *Définition.* Soit G un ouvert de **C**, et S un sous-ensemble de G. On dit que S est dominant dans G si $\|f\|_S = \|f\|_G$ pour toute f dans $H^\infty(G)$.

La proposition suivante justifie l'introduction de cette définition.

2.2. PROPOSITION. *Soient G un ouvert* connexe *borné de* **C**, *et U la composante connexe de G^* qui contient G. Alors $P(G)$ est fermé dans $H^\infty(G)$ si et seulement si G est dominant dans U.*

Preuve. Si G est dominant dans U, l'application restriction de $H^\infty(U)$ dans $H^\infty(G)$ est une isométrie, et donc l'ensemble $\{f_{|G} : f \in H^\infty(U)\}$ est fermé dans $H^\infty(G)$; cet ensemble coïncide avec $P(G)$ d'après le théorème 1.4.

Réciproquement supposons $P(G)$ fermé dans $H^\infty(G)$; l'application restriction précédente est un homomorphisme continu bijectif de l'algèbre