**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

**Band:** 26 (1980)

**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LIMITES DE SUITES BORNÉES DE POLYNÔMES

Autor: Savoyant, Michel

Kapitel: 1. Introduction

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-51069

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 01.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

# LIMITES DE SUITES BORNÉES DE POLYNÔMES

# par Michel SAVOYANT

## **NOTATIONS**

- · C désigne le plan complexe; si  $F \subset \mathbb{C}$ ,  $\partial F$  est la frontière de F,  $\overline{F}$  l'adhérence de F.
- ·  $\Delta(z_0, r)$  est le disque ouvert de centre  $z_0$  et de rayon r > 0. On notera  $\Delta = \Delta(0, 1)$ .
- Si f est une fonction complexe bornée définie sur F on note  $||f||_F$   $= \sup_{z \in F} |f(z)|.$

Soit G un ouvert borné de C.

- $H^{\infty}(G)$  est l'algèbre de Banach des fonctions analytiques bornées sur G avec la norme  $||f||_{G}$ .
- A(G) est l'algèbre uniforme des fonctions continues sur  $\overline{G}$  et analytique dans G.

### 1. Introduction

Soit G un ouvert borné de C et B un sous-ensemble de  $H^{\infty}(G)$ : on note B(G) l'ensemble des fonctions de  $H^{\infty}(G)$  qui sont limites ponctuelles sur G d'une suite bornée d'éléments de B; nous nous intéressons au problème suivant: quand B(G) est-il fermé dans  $H^{\infty}(G)$ ? Lorsque B = A(G) ou (avec une hypothèse supplémentaire sur  $\partial G$ ) lorsque B est l'ensemble des fractions rationnelles avec pôles hors de  $\overline{G}$ , A. M. Davie ([3]) a montré que B(G) est fermé dans  $H^{\infty}(G)$ ; nous étudions ici le cas où B = P, l'algèbre des polynômes. Rubel et Shields ([7] th 4.1) ont montré qu'en général P(G) n'est pas fermé dans  $H^{\infty}(G)$ ; dans ce travail nous donnons une condition géométrique nécessaire et suffisante pour que P(G) le soit lorsque G est connexe. Avant d'énoncer le résultat principal nous donnons deux définitions.

- 1.1. Définition. Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{C}$ . L'enveloppe de Carathéodory de  $\Omega$  est l'intérieur du complémentaire de la composante connexe non bornée du complémentaire de  $\overline{\Omega}$ . On note  $\Omega^*$  cet ouvert.
- 1.2. Définition. Soit  $\Omega$  un ouvert de C et S un sous-ensemble ouvert de  $\Omega$ ; un point  $\zeta \in \partial \Omega$  est dit accessible (resp. accessible à partir de S) s'il existe un chemin continu  $z = \gamma(t)$  ( $0 \le t \le 1$ ) tel que:  $\gamma(t) \in \Omega$  (resp.  $\in S$ ) pour  $t \in [0, 1[$  et  $\gamma(1) = \zeta$ .

Nous démontrons le théorème suivant:

1.3. Théorème. Soient G un ouvert connexe borné de  $\mathbb{C}$ ,  $G^*$  son enveloppe de Carathéodory, U la composante connexe de  $G^*$  contenant G, et  $G' = U \setminus \overline{G}$  Alors P(G) est fermé dans  $H^{\infty}(G)$  si et seulement si l'ensemble des points de  $\partial U$  accessibles à partir de G' est au plus dénombrable.

Nous aurons à utiliser le théorème suivant qui caractérise les éléments de P(G): (cf. [5], p. 151 ou [7] pour une démonstration).

1.4. Théorème. Une fonction  $f \in H^{\infty}(G)$  est dans P(G) si et seulement s'il existe une fonction  $F \in H^{\infty}(G^*)$  tel que  $F \equiv f$  sur G.

Nous donnerons aussi des conditions suffisantes, portant seulement sur  $G^*$ , pour que P(G) soit fermé dans  $H^{\infty}(G)$ .

# 2. Ensembles dominants

2.1. Définition. Soit G un ouvert de C, et S un sous-ensemble de G. On dit que S est dominant dans G si  $||f||_S = ||f||_G$  pour toute f dans  $H^{\infty}(G)$ .

La proposition suivante justifie l'introduction de cette définition.

2.2. Proposition. Soient G un ouvert connexe borné de  $\mathbb{C}$ , et U la composante connexe de  $G^*$  qui contient G. Alors P(G) est fermé dans  $H^{\infty}(G)$  si et seulement si G est dominant dans U.

Preuve. Si G est dominant dans U, l'application restriction de  $H^{\infty}(U)$  dans  $H^{\infty}(G)$  est une isométrie, et donc l'ensemble  $\{f_{\mid G}: f \in H^{\infty}(U)\}$  est fermé dans  $H^{\infty}(G)$ ; cet ensemble coïncide avec P(G) d'après le théorème 1.4.

Réciproquement supposons P(G) fermé dans  $H^{\infty}(G)$ ; l'application restriction précédente est un homomorphisme continu bijectif de l'algèbre