Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 26 (1980)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE PRODUIT DES CONJUGUÉS EXTÉRIEURS AU CERCLE UNITÉ D'UN ENTIER ALGÉBRIQUE

Autor: Waldschmidt, Michel

Kapitel: Analogue elliptique

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-51068

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 17.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Au lieu d'utiliser le polynôme minimal de f on peut utiliser n'importe quel polynôme $F \in \mathbf{Z}[X]$, pourvu que $F(\alpha^p) \neq 0$. On aura une bonne minoration de la norme de $F(\alpha^p)$ si f (ou mieux, une puissance de f) divise F.

LEMME 2. *Soient α un entier algébrique non nul et non racine de l'unité, f son polynôme minimal, H sa hauteur, T un entier, p un nombre premier, et $F \in \mathbf{Z}[X]$ un polynôme de degré $< L$ tel que f^T divise F et $F(\alpha^p) \neq 0$. Alors*

$$M(\alpha)^{Lp}\ (LH)^d \geqslant p^{dT}\ .$$

En effet, on a

$$|N(F(\alpha^p))| \leqslant (L\,H)^d\ M(\alpha)^{Lp}$$

et p^{dT} divise la norme de $F(\alpha^p)$.

Il reste à trouver un polynôme F vérifiant les hypothèses du lemme 2. On peut bien sûr choisir $F = f^T$, mais on ne trouve alors rien de mieux que le lemme 1. Le miracle vient de la méthode de Thue: en utilisant le lemme de Siegel, on peut construire un polynôme F tel que f^T divise F, et tel que la hauteur de F ne soit pas trop grande:

$$H(F) \leqslant 2 + \left(2^T\ L^{T^2 d} M(\alpha)^{TL}\right)^{1/(L-dT)}\ ,$$

pourvu que $L \geqslant 2\,d\,T$. Ainsi le degré de F risque d'être plus grand que celui de f^T, mais on gagne une bonne majoration de la hauteur de F. On choisit $T = [50\,(\log d)\,(\log\log d)^{-1}]$, et $L = dT^2$. On montre qu'il existe un nombre premier p dans l'intervalle $[T^2, 6\,T^2 \log T]$ tel que $F(\alpha^p) \neq 0$. On en déduit $\log M(\alpha) \geqslant (8\,T^3)^{-1}$ pour $d \geqslant 16$, ce qui démontre le théorème.

Dans un travail récent [D], E. Dobrowolski a obtenu des minorations de $M(P)$ pour $P \in \mathbf{Z}[X]$, $P(0) \neq 0$ et P non produit de polynômes cyclotomiques, en fonction seulement du nombre de coefficients non nuls de P.

ANALOGUE ELLIPTIQUE

Soit E une courbe elliptique définie sur le corps $\overline{\mathbf{Q}}$ des nombres algébriques. Soit $\hat{h}$ la hauteur de Néron Tate sur $E(\overline{\mathbf{Q}})$. M. Anderson a démontré dans le cas C.M. que pour tout $P \in E(\overline{\mathbf{Q}})$ non de torsion,

$$\hat{h}(P) > c_1\ D^{-4}(\log D)^{-3}\ ,$$

où c_1 est une constante positive ne dépendant que de g_2, g_3. Cet énoncé a été récemment amélioré par D. W. Masser (résultat annoncé en Mai 1979 aux journées sur les fonctions abéliennes et les nombres transcendants):

THÉORÈME (D. W. Masser). *Soit E une courbe elliptique définie sur $\overline{\mathbf{Q}}$ Il existe $c_2 > 0$ tel que si $P \in E(\overline{\mathbf{Q}})$ n'est pas de torsion, alors*

$$\hat{h}(P) > c_2 \; D^{-10} (\log D)^{-6} .$$

De plus si E a une multiplication complexe

$$\hat{h}(P) > c_2 \; D^{-3} (\log D)^{-2} .$$

REMARQUE FINALE

Soit α un *nombre* algébrique de polynôme minimal

$$a_0 X^d + \ldots = a_d = a_0 \prod_{j=1}^{d} (X - \alpha_j) .$$

On définit

$$M(\alpha) = |a_0| \prod_{j=1}^{d} \max(1, |\alpha_j|) .$$

Le résultat suivant, implicite chez Feldman, a été explicité par D. Bertrand:

$$M(\alpha) = \prod_{v} \max(1, |\alpha|_v)$$

où v décrit l'ensemble des valeurs absolues convenablement normalisées de $\mathbf{Q}(\alpha)$. La hauteur logarithmique absolue de α introduite par A. Weil peut alors être définie par

$$h(\alpha) = \frac{1}{[\mathbf{Q}(\alpha) : \mathbf{Q}]} \log M(\alpha) .$$

Dans les démonstrations de transcendance on a le choix entre plusieurs définitions de la « taille ». Il est maintenant généralement admis (depuis peu) que le meilleur choix est $h(\alpha)$.