

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 26 (1980)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LE PRODUIT DES CONJUGUÉS EXTÉRIEURS AU CERCLE UNITÉ D'UN ENTIER ALGÉBRIQUE  
**Autor:** Waldschmidt, Michel  
**Kapitel:** Polynômes réciproques  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-51068>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

La question de Lehmer est donc résolue pour les polynômes non réciproques. Néanmoins l'étude de l'ensemble des valeurs de  $M(\alpha)$  pour  $\alpha$  non réciproque n'est pas terminée. Le plus petit point limite connu [B1, B2, B4] correspond aux polynômes  $X^n + X + 1$ :

$$\begin{aligned}\beta &= \exp \int_0^1 \int_0^1 \log |e^{2i\pi t_1} + e^{2i\pi t_2} + 1| dt_1 dt_2 \\ &= \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/3} -\log \left( 2 \sin \frac{t}{2} \right) dt \right\} \\ &= 1,38135 \dots\end{aligned}$$

On ignore si ce nombre est algébrique ou transcendant (cf. [B2]).

*Remarque.* Pour  $P \in \mathbf{C}[z_1, \dots, z_n]$ , Mahler définit

$$M(P) = \exp \int_0^1 \dots \int_0^1 \log |P(e^{2i\pi t_1}, \dots, e^{2i\pi t_n})| dt_1 \dots dt_n.$$

La formule de Jensen montre que  $M(\alpha) = M(P)$  si  $P \in \mathbf{Z}[X]$  est le polynôme minimal de  $\alpha$ . D'autre part soit  $P(X, Y) \in \mathbf{C}[X, Y]$ , et, pour  $k \geq 0$ , soit  $Q_k(X) = P(X, X^k) \in \mathbf{C}[X]$ . Alors on a (cf. [B1] théorème 2)  $M(Q_k) \rightarrow M(P)$  quand  $k \rightarrow \infty$ .

### POLYNÔMES RÉCIPROQUES

D. W. Boyd a fait très récemment une recherche sur ordinateur qui lui a permis de vérifier que  $M(\alpha) \geq \alpha_0$  si  $\alpha$  est un nombre algébrique (non nul et non racine de l'unité) de degré  $\leq 16$ , ou bien de degré  $\leq 26$  et de hauteur  $\leq 1$  (i.e. dont le polynôme minimal a pour coefficients 0, 1 ou -1). D'autre part le plus petit point limite de l'ensemble des  $M(\alpha)$  qu'il connaisse est

$$\begin{aligned}M(Y^2(X+1) + Y(X^2 + X + 1) + X^2 + 1) \\ = \exp \int_0^1 \int_0^1 \log |\zeta^2(1+z^{-1}) + \zeta(z+1+z^{-1}) + z+1| d\theta dt \\ = 1,255425 \dots\end{aligned}$$

(où on a écrit  $\zeta = e^{2i\pi\theta}$ ,  $z = e^{2i\pi t}$ ), correspondant par exemple aux polynômes

$$X^{2n}(1+X^{-1}) + X^n(X+1+X^{-1}) + X + 1.$$

Enfin Boyd [B1] demande si  $\beta = 1,38135\dots$  est le plus petit élément du deuxième ensemble dérivé de  $\{M(\alpha)\}$ .

Le problème initial de Lehmer a fait l'objet de plusieurs travaux récents. Soit  $d$  un entier positif. Comme il n'existe qu'un nombre fini d'entiers algébriques de degré  $d$  et de mesure inférieure ou égale à  $2^d$ , il existe une constante  $C(d) > 1$  telle que si  $\alpha$  est un entier algébrique non nul et non racine de l'unité de degré  $d$ , on ait  $M(\alpha) > C(d)$ . En notant  $|\alpha| = \max_{1 \leq j \leq d} |\alpha_j|$  et en remarquant que

$$|\alpha| \leq M(\alpha) \leq |\alpha|^d,$$

on en déduit sous les mêmes hypothèses  $|\alpha| > C(d)^{1/d}$ , et même, si le polynôme minimal de  $\alpha$  est réciproque,  $|\alpha| > C(d)^{2/d}$ .

A défaut de pouvoir minorer  $C(d)$  par une constante absolue supérieure à 1 (ce qui correspondrait à une réponse négative à la question de Lehmer), on peut chercher à minorer  $C(d)$  en fonction de  $d$ . Un tel résultat a été obtenu par Schinzel et Zassenhaus en 1965:

$$C(d) > 1 + \frac{c}{2^d}$$

où  $c$  est une constante absolue positive. Ils posaient alors le problème de l'existence d'une constante  $c' > 0$  telle que  $|\alpha| > 1 + \frac{c'}{d}$  sous les hypothèses précédentes (ce qui résulterait d'une réponse négative à la question de Lehmer, et serait le meilleur possible comme on le voit sur l'exemple  $\alpha = 2^{1/d}$ ).

Une amélioration considérable a été obtenue par Blanksby et Montgomery en 1971:

$$C(d) > 1 + \frac{1}{52 d \log 6d}$$

et par conséquent pour la conjecture de Schinzel et Zassenhaus

$$|\alpha| > 1 + \frac{1}{30 d^2 \log 6d}.$$

En 1977, C. L. Stewart montra que la méthode de Thue conduit à la minoration

$$C(d) > 1 + \frac{1}{10^4 d \log d};$$

la constante est moins bonne, mais la méthode (on va le voir) très fructueuse.

Simultanément et indépendamment, E. Dobrowolski obtint par une méthode simple et élégante un nouveau progrès vers la conjecture de Zassenhaus :

$$\lceil \alpha \rceil > 1 + \frac{1}{4e d^2} .$$

Voici sa démonstration. Supposons que  $\alpha$  soit un entier algébrique non nul tel que  $\lceil \alpha \rceil \leq 1 + (4ed^2)^{-1}$ . Soit  $p$  un nombre premier,  $2ed < p < 4ed$ . Pour  $k$  entier positif considérons la somme de Newton

$$S_k = \sum_{i=1}^d \alpha_i^k .$$

Pour  $k \leq d$  on a

$$\begin{aligned} |S_k| &\leq d \left(1 + \frac{1}{4ed^2}\right)^d < de \\ |S_{kp}| &\leq d \left(1 + \frac{1}{4ed^2}\right)^{4ed^2} < de , \end{aligned}$$

donc

$$|S_k - S_{kp}| \leq 2de < p .$$

Mais  $S_k \equiv S_k^p \equiv S_{kp} \pmod{p}$ , donc  $S_k = S_{kp}$  pour  $1 \leq k \leq d$ , ce qui montre que  $\alpha$  et  $\alpha^p$  sont conjugués. On en déduit facilement que  $\alpha$  est une racine de l'unité, ce qui termine la démonstration.

Peu après, Dobrowolski améliorait son résultat :

$$\lceil \alpha \rceil > 1 + \frac{\log d}{d^2 + o(d)} \quad \text{pour } d \rightarrow \infty .$$

Il choisit  $3d \leq p \leq 6d$ , et la partie nouvelle de la démonstration consiste à vérifier les récurrences

$$S_{kp} \equiv S_k \pmod{k} \quad \text{pour } 1 \leq k < d .$$

En 1978, Dobrowolski obtint une remarquable amélioration des résultats antérieurs :

$$C(d) > 1 + c_0 (\log \log d / \log d)^3 ,$$

où  $c_0$  est une constante absolue positive effectivement calculable.

Il a depuis montré que  $c_0$  peut être choisi égal à  $\frac{1}{1200}$ , et même peut être

remplacé par  $1 - \varepsilon$  si on se limite aux entiers  $d$  suffisamment grands:  $d \geq d_0(\varepsilon)$ . Par conséquent pour la conjecture de Schinzel Zassenhaus

$$\lceil \alpha \rceil > 1 + \frac{2 - \varepsilon}{d} \left( \frac{\log \log d}{\log d} \right)^3.$$

Sa démonstration repose sur la méthode de Thue-Stewart, et utilise des congruences de manière un peu analogue à sa démonstration élémentaire précédente. Nous allons la présenter en y incorporant des simplifications introduites par Mignotte mais qui conduisent seulement à  $c_0 = 10^{-6}$ .

**THÉORÈME** (Dobrowolski). *Soit  $\alpha$  un entier algébrique non nul et non racine de l'unité. Alors*

$$M(\alpha) > 1 + c_0 \left( \frac{\log \log d}{\log d} \right)^3$$

avec  $c_0 \geq 10^{-6}$ .

Pour présenter la démonstration de Dobrowolski, nous allons procéder par approximations successives; pour les résultats intermédiaires, voir Mignotte [M].

**LEMME 1.** *Soit  $\alpha$  un entier algébrique non nul qui n'est pas racine de l'unité, de degré  $d$  et de hauteur  $\leq H$ . Alors*

$$M(\alpha) \geq 2^{1/(2dH)} > 1 + \frac{\log 2}{2dH}.$$

La deuxième inégalité résulte de  $1 + x < e^x$  pour  $x > 0$ . Pour la première on considère un nombre premier  $p$  vérifiant  $2dH \leq p \leq 4dH$ . Soit  $f$  le polynôme minimal de  $\alpha$ . On a par le petit théorème de Fermat

$$f(X^p) \equiv f(X)^p \pmod{p\mathbf{Z}[X]}$$

donc  $p^d$  divise la norme de  $f(\alpha^p)$ . Comme  $\alpha$  et  $\alpha^p$  ne sont pas conjugués, on a  $f(\alpha^p) \neq 0$ . Donc

$$p^d \leq |\text{Norme } f(\alpha^p)| \leq (dH)^d M(\alpha)^{pd}.$$

Donc

$$M(\alpha) \geq (p/dH)^{1/p}.$$

L'étude de la fonction  $(x/dH)^{1/x}$  sur l'intervalle  $[2dH, 4dH]$  donne le résultat.

Au lieu d'utiliser le polynôme minimal de  $f$  on peut utiliser n'importe quel polynôme  $F \in \mathbf{Z}[X]$ , pourvu que  $F(\alpha^p) \neq 0$ . On aura une bonne minoration de la norme de  $F(\alpha^p)$  si  $f$  (ou mieux, une puissance de  $f$ ) divise  $F$ .

**LEMME 2.** *Soient  $\alpha$  un entier algébrique non nul et non racine de l'unité,  $f$  son polynôme minimal,  $H$  sa hauteur,  $T$  un entier,  $p$  un nombre premier, et  $F \in \mathbf{Z}[X]$  un polynôme de degré  $< L$  tel que  $f^T$  divise  $F$  et  $F(\alpha^p) \neq 0$ . Alors*

$$M(\alpha)^{Lp} (LH)^d \geq p^{dT}.$$

En effet, on a

$$|N(F(\alpha^p))| \leq (LH)^d M(\alpha)^{Lp}$$

et  $p^{dT}$  divise la norme de  $F(\alpha^p)$ .

Il reste à trouver un polynôme  $F$  vérifiant les hypothèses du lemme 2. On peut bien sûr choisir  $F = f^T$ , mais on ne trouve alors rien de mieux que le lemme 1. Le miracle vient de la méthode de Thue: en utilisant le lemme de Siegel, on peut construire un polynôme  $F$  tel que  $f^T$  divise  $F$ , et tel que la hauteur de  $F$  ne soit pas trop grande:

$$H(F) \leq 2 + (2^T L^{T^2 d} M(\alpha)^{TL})^{1/(L-dT)},$$

pourvu que  $L \geq 2dT$ . Ainsi le degré de  $F$  risque d'être plus grand que celui de  $f^T$ , mais on gagne une bonne majoration de la hauteur de  $F$ . On choisit  $T = [50(\log d)(\log \log d)^{-1}]$ , et  $L = dT^2$ . On montre qu'il existe un nombre premier  $p$  dans l'intervalle  $[T^2, 6T^2 \log T]$  tel que  $F(\alpha^p) \neq 0$ . On en déduit  $\log M(\alpha) \geq (8T^3)^{-1}$  pour  $d \geq 16$ , ce qui démontre le théorème.

Dans un travail récent [D], E. Dobrowolski a obtenu des minortations de  $M(P)$  pour  $P \in \mathbf{Z}[X]$ ,  $P(0) \neq 0$  et  $P$  non produit de polynômes cyclotomiques, en fonction seulement du nombre de coefficients non nuls de  $P$ .

### ANALOGUE ELLIPTIQUE

Soit  $E$  une courbe elliptique définie sur le corps  $\overline{\mathbf{Q}}$  des nombres algébriques. Soit  $\hat{h}$  la hauteur de Néron Tate sur  $E(\overline{\mathbf{Q}})$ . M. Anderson a démontré dans le cas C.M. que pour tout  $P \in E(\overline{\mathbf{Q}})$  non de torsion,

$$\hat{h}(P) > c_1 D^{-4} (\log D)^{-3},$$