Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 26 (1980)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: NOMBRES ALGÉBRIQUES ET THÉORIE DES AUTOMATES

Autor: France, Michel Mendes

Anhang: § 4. Appendice: Suite de Morse pondérée et nombres de Pisot

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-51067

Ainsi, si un élément est algébrique irrationnel dans une base, il est transcendant dans toute base indépendante (comparer avec le problème 1 du paragraphe 1). Il serait intéressant d'élargir le champ d'application du résultat précédent de façon à pouvoir l'appliquer au corps **R**. Dans cet ordre d'idée, il faut signaler le résultat suivant obtenu indépendamment par Dekking [5], K. Kubota [9] et A. van der Poorten [17] employant une méthode de K. Mahler.

THÉORÈME 2. *Le nombre de Morse*

$$\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n}{2^n}$$

est transcendant.

La méthode employée pour établir ce résultat devrait pouvoir permettre de montrer que si la suite $S = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, ...)$ est engendrée par un g-automate, alors $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n g^{-n}$ est transcendant. Ceci répondrait à la conjecture énoncée au premier paragraphe.

§ 4. APPENDICE: SUITE DE MORSE PONDÉRÉE ET NOMBRES DE PISOT

Soit $c = (c_n)$ une suite infinie de nombres réels. A l'entier $n \geqslant 0$, on associe le nombre

$$f_c(n) = \exp 2i\pi \sum_{k=0}^{\infty} e_k(n) c_k ,$$

où $e_k(n)$ est la k^{e} décimale binaire de n. On peut alors montrer que la suite f_c admet une corrélation:

$$\forall\, l \in \mathbf{Z} , \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \overline{f_c(n)}\, f_c(n+l) = \gamma_c(l) \text{ existe.}$$

Cette corrélation γ_c est transformée de Fourier d'une mesure positive bornée Λ_c

$$\gamma_c(l) = \int_0^1 (\exp 2i\pi l x)\, \Lambda_c(dx) .$$

Soit $\theta \geqslant 1$ un nombre réel. Considérons la suite $c = (\theta^n)$ à laquelle correspondra la mesure Λ_c notée Λ_θ.

THÉORÈME 3. *Si* θ *est un nombre de Pisot, alors* Λ_θ *est une mesure atomique. Si* θ *n'est pas un nombre de Pisot, alors* Λ_θ *est une mesure continue, purement singulière.*
(Voir [4], [11], [12], [13].)

Ce type de résultat montre qu'une étude spectrale des suites précédemment étudiées est possible. T. Kamae est en train de l'entreprendre et ses résultats seront publiés ultérieurement.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAUM, L. and M. SWEET. Continued fractions of algebraic power series in characteristic 2. *Ann. Math. 103* (1976), 593-610.

[2] COBHAM, A. On the base-dependance of sets of numbers recognizable by finite automata. *Math. Syst. Theory 3* (1969), 186-192.

[3] —— Uniform Tag sequences. *Math. Syst. Theory 6* (1972), 164-192.

[4] COQUET, J., T. KAMAE et M. MENDES FRANCE. Sur la mesure spectrale de certaines suites arithmétiques. *Bull. Soc. Math. France 105* (1977), 369-384.

[5] DEKKING, M. Transcendence du nombre de Thue-Morse. *Comptes Rendus Ac. Sc. Paris 285 (A)* (1977), 157-160.

[6] DELLACHERIE, C. Nombres au hasard (de Borel à Martin Loff). *Gazette des Math., Soc. Math. France 11* (1978), 23-58.

[7] EILENBERG, S. *Automata, Languages and Machines, vol. A.* Academic Press, 1974.

[8] KOLMOGOROFF, A. N. On tables of random numbers. *Sankhyá 25* (1963), 369-376.

[9] KUBOTA, K. An application of Kronecker's theorem to transcendance theory. *Séminaire théorie des nombres de Bordeaux*, 1975-76, exposé 25.

[10] MARTIN-LÖF, P. The definition of random sequences. *Information and Control 9* (1969), 602-619.

[11] MENDES FRANCE, M. Deux remarques concernant l'équirépartition. *Acta Arith. 14* (1968), 163-167.

[12] —— Nombres normaux. Applications aux fonctions pseudo-aléatoires. *Jour. Anal. Math. Jerusalem 20* (1967), 1-56.

[13] QUEFFELEC, M. Mesures spectrales associées à certaines suites arithmétiques. *Bull. Soc. Math. France 107* (1977), 385-421.

[14] RUDIN, W. Some theorem on Fourier coefficients. *Proc. Amer. Math. Soc. 10* (1937), 413-417.

[15] SHAPIRO, H. S. *Extremal problems for polynomials and power series.* Thèse MIT 1951.

[16] SCHNORR, C. P. *Zufälligkeit und Wahrscheinlichkeit.* Lecture Notes in Math. 218, Springer Verlag, 1970.

[17] VAN DER POORTEN, A. Propriétés arithmétiques et algébriques de fonctions satisfaisant une classe d'équations fonctionnelles. *Séminaire Théorie des Nombres de Bordeaux*, 1974-75, exposé 7.

(Reçu le 3 janvier 1980)

Michel Mendes France

UER Mathématiques et Informatique
Université Bordeaux I
351, Cours de la Libération
F-33405 Talence