§ 3. Le résultat

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1980)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

des réels, on conjecture que tout nombre algébrique de degré 3 au moins est à quotients partiels non bornés.)

Dans ce qui suit, nous aurons à considérer des corps à $q = p^{\mu}$ éléments (p premier, $\mu \geqslant 1$ entier). On dira comme précédemment que $S \in \mathbf{F}_q^{\mathrm{N}}$ est algébrique si $S \in \mathbf{F}_q((X))$ est algébrique sur $\mathbf{F}_q(X)$.

§ 3. Le résultat

Soient Ξ et Ξ' deux alphabets finis et soient $T = (t_n) \in \Xi^N$, $T' = (t_n')$ $\in \Xi'^N$. On dit que T' est une image de T si il existe une application $\alpha \colon \Xi \to \Xi'$ telle que pour tout n, $\alpha(t_n) = t_n'$.

Théorème 1. *Soit Ξ un alphabet fini non vide. Soit $T \in \Xi^N$ et soit p un nombre premier. Les trois conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) *Il existe $q = p^{\mu}$ tel que T soit l'image d'un élément algébrique de $\mathbf{F}_q((X))$;*

(ii) *T est l'image d'une suite engendrée par un p-automate;*

(iii) *T est l'image d'un point fixe d'une p-substitution.*

L'équivalence entre (ii) et (iii) était connue de Cobham [3]. Dans un autre article, Cobham [2] établit que si une suite est engendrée à la fois par un g_1-automate et par un g_2-automate, alors elle est périodique à partir d'un certain rang pourvu que g_1 et g_2 soient multiplicativement indépendants. Ce résultat se traduit donc par le corollaire suivant.

Corollaire. *Soient $q_1 = p_1^{\nu_1}$ et $q_2 = p_2^{\nu_2}$ où $p_1 \neq p_2$ (premiers). Soit (ε_n) une suite infinie d'entiers $0 \leqslant \varepsilon_n < \min\{q_1, q_2\}$. Si*

$$S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n X^n \in \mathbf{F}_{q_1}((X))$$

est algébrique sur $\mathbf{F}_{q_1}(X)$ et si

$$S_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n X^n \in \mathbf{F}_{q_2}((X))$$

est algébrique sur $\mathbf{F}_{q_2}(X)$, alors S_1 et S_2 sont tous deux rationnels.

Ainsi, si un élément est algébrique irrationnel dans une base, il est transcendant dans toute base indépendante (comparer avec le problème 1 du paragraphe 1). Il serait intéressant d'élargir le champ d'application du résultat précédent de façon à pouvoir l'appliquer au corps **R**. Dans cet ordre d'idée, il faut signaler le résultat suivant obtenu indépendamment par Dekking [5], K. Kubota [9] et A. van der Poorten [17] employant une méthode de K. Mahler.

THÉORÈME 2. *Le nombre de Morse*

$$\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n}{2^n}$$

est transcendant.

La méthode employée pour établir ce résultat devrait pouvoir permettre de montrer que si la suite $S = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, ...)$ est engendrée par un g-automate, alors $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n g^{-n}$ est transcendant. Ceci répondrait à la conjecture énoncée au premier paragraphe.

§ 4. APPENDICE: SUITE DE MORSE PONDÉRÉE ET NOMBRES DE PISOT

Soit $c = (c_n)$ une suite infinie de nombres réels. A l'entier $n \geqslant 0$, on associe le nombre

$$f_c(n) = \exp 2i\pi \sum_{k=0}^{\infty} e_k(n) c_k ,$$

où $e_k(n)$ est la k^e décimale binaire de n. On peut alors montrer que la suite f_c admet une corrélation:

$$\forall l \in \mathbf{Z} , \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \overline{f_c(n)} f_c(n+l) = \gamma_c(l) \text{ existe.}$$

Cette corrélation γ_c est transformée de Fourier d'une mesure positive bornée Λ_c

$$\gamma_c(l) = \int_0^1 (\exp 2i\pi l x) \Lambda_c(dx) .$$

Soit $\theta \geqslant 1$ un nombre réel. Considérons la suite $c = (\theta^n)$ à laquelle correspondra la mesure Λ_c notée Λ_θ.