Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 26 (1980)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: NOMBRES ALGÉBRIQUES ET THÉORIE DES AUTOMATES

Autor: France, Michel Mendes

Kapitel: § 3. Le résultat

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-51067

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 01.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

des réels, on conjecture que tout nombre algébrique de degré 3 au moins est à quotients partiels non bornés.)

Dans ce qui suit, nous aurons à considérer des corps à $q=p^{\mu}$ éléments $(p \text{ premier}, \mu \geqslant 1 \text{ entier})$. On dira comme précédemment que $S \in \mathbf{F}_q^{\mathbf{N}}$ est algébrique si $S \in \mathbf{F}_q(X)$ est algébrique sur $\mathbf{F}_q(X)$.

§ 3. Le résultat

Soient Ξ et Ξ' deux alphabets finis et soient $T = (t_n) \in \Xi^N$, $T' = (t'_n) \in \Xi'^N$. On dit que T' est une image de T si il existe une application α : $\Xi \to \Xi'$ telle que pour tout n, $\alpha(t_n) = t'_n$.

Théorème 1. Soit Ξ un alphabet fini non vide. Soit $T \in \Xi^N$ et soit p un nombre premier. Les trois conditions suivantes sont équivalentes.

- (i) Il existe $q = p^{\mu}$ tel que T soit l'image d'un élément algébrique de $\mathbf{F}_q(X)$;
- (ii) T est l'image d'une suite engendrée par un p-automate;
- (iii) T est l'image d'un point fixe d'une p-substitution.

L'équivalence entre (ii) et (iii) était connue de Cobham [3]. Dans un autre article, Cobham [2] établit que si une suite est engendrée à la fois par un g_1 -automate et par un g_2 -automate, alors elle est périodique à partir d'un certain rang pourvu que g_1 et g_2 soient multiplicativement indépendants. Ce résultat se traduit donc par le corollaire suivant.

COROLLAIRE. Soient $q_1 = p_1^{v_1}$ et $q_2 = p_2^{v_2}$ où $p_1 \neq p_2$ (premiers). Soit (ε_n) une suite infinie d'entiers $0 \leqslant \varepsilon_n < \min \{q_1, q_2\}$. Si

$$S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n X^n \in \mathbf{F}_{q_1}((X))$$

est algébrique sur $\mathbf{F}_{q_1}(X)$ et si

$$S_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n X^n \in \mathbf{F}_{q_2}((X))$$

est algébrique sur $\mathbf{F}_{q_2}(X)$, alors S_1 et S_2 sont tous deux rationnels.

Ainsi, si un élément est algébrique irrationnel dans une base, il est transcendant dans toute base indépendante (comparer avec le problème 1 du paragraphe 1). Il serait intéressant d'élargir le champ d'application du résultat précédent de façon à pouvoir l'appliquer au corps R. Dans cet ordre d'idée, il faut signaler le résultat suivant obtenu indépendamment par Dekking [5], K. Kubota [9] et A. van der Poorten [17] employant une méthode de K. Mahler.

THÉORÈME 2. Le nombre de Morse

$$\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n}{2^n}$$

est transcendant.

La méthode employée pour établir ce résultat devrait pouvoir permettre de montrer que si la suite $S = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, ...)$ est engendrée par un g-automate, alors $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n g^{-n}$ est transcendant. Ceci répondrait à la conjecture énoncée au premier paragraphe.

§ 4. Appendice: Suite de Morse pondérée et nombres de Pisot

Soit $c = (c_n)$ une suite infinie de nombres réels. A l'entier $n \ge 0$, on associe le nombre

$$f_c(n) = \exp 2i\pi \sum_{k=0}^{\infty} e_k(n) c_k$$

où $e_k(n)$ est la k^e décimale binaire de n. On peut alors montrer que la suite f_c admet une corrélation:

$$V l \in \mathbb{Z}$$
, $\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \overline{f_c(n)} f_c(n+l) = \gamma_c(l)$ existe.

Cette corrélation γ_c est transformée de Fourier d'une mesure positive bornée Λ_c

$$\gamma_c(l) = \int_0^1 (\exp 2i\pi l x) \Lambda_c(dx).$$

Soit $\theta \geqslant 1$ un nombre réel. Considérons la suite $c = (\theta^n)$ à laquelle correspondra la mesure Λ_c notée Λ_{θ} .