

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 26 (1980)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SOUVENIRS MATHÉMATIQUES
Autor: Pisot, Charles
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-51066>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 18.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SOUVENIRS MATHÉMATIQUES ¹⁾

par Charles PISOT

Arrivé au terme de cinquante années d'enseignement, j'ai vu certains jeunes chercheurs, débutant avec enthousiasme, être ensuite déçus par leurs efforts, soit qu'ils soient arrêtés par la difficulté de la question cherchée, soit qu'ils s'aperçoivent qu'ils ont retrouvé des résultats connus. J'ai donc pensé qu'en racontant mon propre cheminement, cela aidera peut-être certains à ne pas se décourager.

Depuis mon enfance, j'avais un goût marqué pour les nombres entiers dont je m'amusais à faire des listes diverses. Entre autres la question de l'extraction de la racine carrée me paraissait bien compliquée et je me demandais s'il n'y avait pas d'autre manière de procéder. En examinant en particulier le cas de $\sqrt{2}$, je me disais que je trouverais une bonne valeur approchée en cherchant dans une table de carrés un carré dont le double soit aussi voisin que possible d'un autre carré. Il s'agit donc de chercher des entiers p et q tels que $|p^2 - 2q^2|$ soit aussi petit que possible. Comme $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel, la plus petite valeur susceptible d'être ce minimum est 1. Or un examen d'une table de carrés montre immédiatement que la valeur 1 est effectivement possible et on trouve même beaucoup de couples p et q de cette espèce, dont voici les premiers:

p	1	1	3	7	17	41	99	...
q	0	1	2	5	12	29	70	...
n	1	2	3	4	5	6	7	...

Ainsi $99/70 = 1,41428...$ est une excellente approximation de $\sqrt{2} = 1,41421...$. En examinant ces entiers et en donnant un numéro n à chaque couple p, q , on s'aperçoit que l'on a:

$$p_{n+2} = 2p_{n+1} + p_n, \quad q_{n+2} = 2q_{n+1} + q_n.$$

¹⁾ Cet article et les deux articles qui suivent (de M. Waldschmidt et de M. Mendes France) sont les textes de conférences prononcées au Colloque organisé à Paris, le 19 juin 1979 en l'honneur du professeur Charles Pisot.

Des essais numériques effectués avec ces formules donnent effectivement des valeurs p_n et q_n avec $|p_n^2 - 2q_n^2| = 1$. Ce résultat que je ne parvenais pas à établir m'a profondément intrigué. En essayant le même procédé avec d'autres racines carrées, comme $\sqrt{3}$ ou $\sqrt{5}$, il semblait qu'il y eut des propriétés analogues.

J'étais alors au Collège d'Obernai et je me suis adressé à mon professeur de mathématiques M. Düringer. Il m'a dit que ce problème était sans doute lié à la théorie des fractions continues et il m'a donné un ouvrage où je pouvais étudier celle-ci. Cette théorie permet effectivement de résoudre en nombres entiers x et y l'équation $|x^2 - dy^2| = 1$ dite de « Pell-Fermat » lorsque d est un entier positif donné, non carré parfait. Je pense que cet événement a déterminé ma recherche future et je rends un hommage ému à ce Maître qui a su discerner immédiatement la théorie utile. Combien en seraient capables aujourd'hui ?

A ma sortie de l'Ecole Normale, j'ai eu la chance d'y être nommé agrégé-préparateur. J'étais alors fermement décidé à me consacrer à la Théorie des nombres, malgré le fait que cette discipline n'avait à l'époque aucun représentant à l'Université française, qui aurait pu être mon directeur de recherche. J'ai alors vanté à mon meilleur ami de l'Ecole, Cl. Chabauty, les beautés des fractions continues. Celui-ci a alors observé que par exemple dans le cas décrit plus haut des valeurs approchées de $\sqrt{2}$, si l'on considérait q_n et p_n comme les coordonnées d'un point A_n dans un plan affine, les vecteurs OA_n vérifiaient la relation

$$OA_{n+2} = 2 OA_{n+1} + OA_n$$

et les points A_n pouvaient s'obtenir par le procédé géométrique suivant : Dans un plan (q, p) , la droite d'équation $p - q\sqrt{2} = 0$ partage les points à coordonnées entières de l'angle $q > 0, p > 0$ en deux sous-ensembles ; les enveloppes convexes de ces sous-ensembles ont pour sommets alternativement les points A_n . Une telle interprétation est valable pour toute fraction continue. Ce succès a décidé mon ami à se consacrer à la Théorie des nombres et nous nous sommes mis à généraliser le procédé.

Considérons le cas de trois dimensions. Soit un espace affine rapporté à trois axes r, q, p . Limitons-nous pour simplifier à $r \geq 0, q \geq 0, p \geq 0$. Soit D une demi-droite d'origine 0 située dans cet ensemble et définie par le vecteur de composantes $(1, \beta, \alpha)$ avec $\alpha > \beta > 0$, donc D a pour équations $p - \alpha r = 0, q - \beta r = 0$. Soient les points $A_0 = (1, 0, 0), A_1 = (0, 1, 0), A_2 = (0, 0, 1)$ et posons $\alpha_0 = \alpha, \beta_0 = \beta$. Supposons déjà

construit les points A_{n+2} , A_{n+1} , A_n pour $n \geq 0$, nous considérons le plan passant par A_n et parallèle aux vecteurs $0A_{n+1}$ et $0A_{n+2}$. Ce plan coupe la demi-droite D en un point D_n ; le vecteur $0D_n$ s'écrit donc

$$0D_n = \alpha_n 0A_{n+2} + \beta_n 0A_{n+1} + 0A_n.$$

Désignons par $[z]$ l'entier immédiatement inférieur à z , donc $[z] \leq z < [z] + 1$ posons $a_n = [\alpha_n]$ et $b_n = [\beta_n]$; puis

$$0A_{n+3} = a_n 0A_{n+2} + b_n 0A_{n+1} + 0A_n.$$

Le déterminant formé par les composantes de trois vecteurs consécutifs $0A_{n+3}$, $0A_{n+2}$, $0A_{n+1}$ est alors égal à celui correspondant aux vecteurs $0A_{n+2}$, $0A_{n+1}$, $0A_n$ donc à celui de $0A_2$, $0A_1$, $0A_0$; par suite il vaut 1; ainsi $0A_{n+2}$, $0A_{n+1}$, $0A_n$ est une base de l'espace pour chaque n . En écrivant que $0D_{n+1}$ et $0D_n$ sont proportionnels, on a

$$0D_{n+1} = \rho_{n+1} 0D_n = \rho_{n+1} (\alpha_n 0A_{n+2} + \beta_n 0A_{n+1} + 0A_n)$$

et

$$0D_{n+1} = \alpha_{n+1} (a_n 0A_{n+2} + b_n 0A_{n+1} + 0A_n) + \beta_{n+1} 0A_{n+2} + 0A_{n+1},$$

puis en égalant les composantes sur la base $0A_{n+2}$, $0A_{n+1}$, $0A_n$, on obtient:

$$a_n \alpha_{n+1} + \beta_{n+1} = \rho_{n+1} \alpha_n; \quad b_n \alpha_{n+1} + 1 = \rho_{n+1} \beta_n; \quad \alpha_{n+1} = \rho_{n+1},$$

d'où

$$a_n + (\beta_{n+1}/\alpha_{n+1}) = \alpha_n, \quad b_n + (1/\alpha_{n+1}) = \beta_n;$$

comme $a_n = [\alpha_n]$ et $b_n = [\beta_n]$, on a

$$0 \leq \beta_{n+1}/\alpha_{n+1} < 1, \quad 0 \leq 1/\alpha_{n+1} < 1$$

et les deux suites a_n et b_n s'obtiennent par

$$b_n = [\beta_n], \quad \alpha_{n+1} = 1/(\beta_n - b_n), \quad a_n = [\alpha_n], \\ \beta_{n+1} = \alpha_{n+1} (\alpha_n - a_n);$$

l'algorithme peut donc se continuer aussi longtemps que ni α_n , ni β_n ne sont des entiers; si cela se produit α et β sont « rationnellement dépendants », c'est-à-dire il existe des entiers u, v, w , avec u, v non nuls tous les deux tels que $u\alpha + v\beta + w = 0$.

Si on projette les points A_n parallèlement à la direction D sur le plan $0A_1, 0A_2$, appelons d_n la projection de A_n . On a

$$0d_{n+3} = a_n 0d_{n+2} + b_n 0d_{n+1} + 0d_n; \quad 0 = \alpha_n 0d_{n+2} + \beta_n 0d_{n+1} + 0d_n,$$

donc

$$0d_{n+3} = (b_n - (\beta_n a_n)/\alpha_n) 0d_{n+1} + (1 - a_n/\alpha_n) 0d_n = \lambda_n 0d_{n+1} + \mu_n 0d_n,$$

avec

$$\lambda_n = b_n - (\beta_n a_n)/\alpha_n, \quad \mu_n = 1 - a_n/\alpha_n.$$

On a $0 \leq \mu_n < 1$ et

$$\begin{aligned} \lambda_n + \mu_n &= 1 + b_n - ((\beta_n + 1) a_n)/\alpha_n < 1 + b_n - (b_n + 1) \frac{a_n}{a_n + 1} \\ &= (b_n + 1)/(a_n + 1) \end{aligned}$$

donc $\lambda_n + \mu_n < 1$. De manière analogue

$$\begin{aligned} -\lambda_n + \mu_n &= 1 + (\beta_n - 1) (a_n/\alpha_n) - b_n < 1 - b_n + (a_n b_n)/\alpha_n \\ &\leq 1 - b_n + b_n = 1. \end{aligned}$$

Ainsi $|\lambda_n| + \mu_n < 1$ et $|0d_{n+3}| \leq \sup(|0d_{n+1}|, |0d_n|)$, cette inégalité est stricte si $\sup(|0d_{n+3}|, |0d_n|)$ n'est pas nul. Or $0d_n = (0, q_n - \beta r_n, p_n - \alpha r_n)$ si (r_n, q_n, p_n) sont les composantes de $0A_n$. Pour $n = 1, 2, 3$, ces composantes sont de longueur inférieure à 1, donc pour tout $n \geq 1$, on a les inégalités $|q_n - \beta r_n| < 1$, $|p_n - \alpha r_n| < 1$.

Cela permet de montrer que le cas α_n entier ou β_n entier pour un certain n se produit lorsque α et β sont rationnellement dépendants. S'il n'en est pas ainsi, on a toujours α_n et β_n non entiers, donc l'algorithme peut se continuer indéfiniment. Dans ce dernier cas on a alors $\alpha = \lim (p_n/r_n)$, $\beta = \lim (q_n/r_n)$ lorsque n augmente indéfiniment. On obtient par conséquent des approximations simultanées rationnelles (de même dénominateur) des deux nombres α et β .

Lorsque cet algorithme devient périodique, c'est-à-dire si l'on a, pour un certain entier $s \geq 1$, les égalités $\alpha_{n+s} = \alpha_n$, $\beta_{n+s} = \beta_n$ pour tout $n \geq n_0$, on montre que la quantité $\rho = \alpha_{n+1} \alpha_{n+2} \dots \alpha_{n+s}$, qui est manifestement indépendante de n , vérifie une équation $\rho^3 - p\rho^2 - q\rho - 1 = 0$, à coefficients p et q entiers rationnels, ayant dans le plan complexe une racine réelle $\rho > 1$ et les deux autres racines dans $|z| < 1$; les nombres α et β sont alors deux irrationnelles rationnellement indépendantes du corps $\mathbb{Q}[\rho]$.

Nous étions arrivé à ces résultats au bout d'une année de travail, mais alors j'ai découvert un article dans l'*Encyclopédie des Sciences Mathé-*

matiques qui montrait que la représentation géométrique des fractions continues avait été exposée par F. Klein en 1896 [8] et que la généralisation aux couples d'irrationnelles était due à C. G. Jacobi (1868) [7] et les précisions sur l'approximation avaient été trouvées par O. Perron en 1908 [10]. Quoique déçus par ces constatations, il nous restait cependant le sentiment d'avoir été capables de trouver des résultats intéressants dans un domaine où nous n'avions pas été guidés. Entre-temps mon ami Chabauty m'a quitté, car il avait obtenu une bourse pour les Etats-Unis. Moi-même je cherchais à attaquer le problème, qui n'est d'ailleurs pas encore résolu aujourd'hui, de la périodicité du développement d'un couple d'irrationnelles cubiques d'un même corps du troisième degré. Signalons à ce sujet le résultat obtenu par mon premier élève M. David [3] qui a montré que pour des algorithmes très voisins de celui de Jacobi, la périodicité n'avait pas lieu pour certains couples d'irrationnelles cubiques indépendantes. J'ai ainsi été conduit à calculer de nombreux développements, ce qui conduisait, dans le cas de la périodicité, à des équations du type $\rho^3 - p\rho^2 - q\rho - 1 = 0$ et à étudier les puissances successives ρ^n de la racine $\rho > 1$. J'ai alors été frappé par un résultat, d'ailleurs évident, à savoir que ρ^n était de plus en plus voisin d'un entier si n augmente indéfiniment. Cela provient du fait que la somme $u_n = \rho^n + \rho'^n + \rho''^n$, où ρ' et ρ'' sont les conjugués de ρ , est un entier rationnel et que $|\rho'| < 1$, $|\rho''| < 1$. En ayant l'idée de chercher une réciproque à cette propriété, je me suis rappelé la méthode de la « fonction génératrice » de Lagrange. En considérant, pour une variable z complexe, la série $\sum_0^\infty u_n z^n$, on a une série de Taylor à coefficients entiers.

Or les résultats de la thèse de G. Hadamard ont permis à E. Borel en 1894 [2] de montrer que si une telle série représente une fonction méromorphe dans un disque $|z| < R$ où $R > 1$, alors elle était le développement d'une fraction rationnelle. Or si on pose $\rho^n = u_n + \varepsilon_n$, avec u_n entier rationnel et que pour un $\theta < 1$ on ait $|\varepsilon_n| \leq \theta^n$, alors $\sum_0^\infty (\rho^n - u_n) z^n = \sum_0^\infty \varepsilon_n z^n$ converge pour $|z| < 1/\theta$ et $1/\theta > 1$, tandis que $\sum_0^\infty \rho^n z^n = 1/(1 - \rho z)$ est méromorphe dans le plan complexe. Le théorème de Borel s'applique donc et

$$\sum_0^\infty u_n z^n = A(z)/Q(z)$$

est une fraction rationnelle, où A et Q sont des polynômes à coefficients entiers. Fatou [6] a montré que A et Q peuvent être choisis premiers entre

eux et $Q(0) = 1$. Cela montre que ρ est un entier algébrique dont tous les conjugués autres que ρ se trouvent dans le disque $|z| \leq \theta < 1$. Ce résultat, sauf le fait que ρ est entier algébrique, avait été démontré avec la méthode des tiroirs par A. Thue en 1912 [15], mais je l'ignorais heureusement à l'époque.

Une amélioration du critère de Hadamard-Borel [11] permet d'aller plus loin et de montrer que si $\rho > 1$ et $\lambda > 0$ sont des réels tels que pour tout $n \geq 0$ il existe un entier rationnel u_n de sorte que la série $\sum_0^\infty (\lambda \rho^n - u_n)^2$ soit convergente, alors ρ est un entier algébrique dont tous les conjugués autres que ρ sont dans le disque $|z| < 1$ du plan complexe; λ est alors un nombre algébrique de l'extension par ρ du corps des rationnels.

L'ensemble des entiers algébriques ρ ayant les propriétés précédentes s'appelle S en l'honneur de R. Salem qui en a trouvé des propriétés remarquables. En se servant de mes méthodes, R. Salem a, en particulier, démontré que l'ensemble S est fermé pour la topologie des nombres réels [13]. Son idée essentielle consiste à associer à chaque ρ de l'ensemble S la fraction rationnelle $P(z)/Q(z)$, où P est le polynôme irréductible ayant ρ pour zéro et Q le polynôme réciproque de P ; alors $|P(z)/Q(z)| = 1$ sur $|z| = 1$. Cela lui permet de borner la somme de la série $\sum_0^\infty (\lambda \rho^n - u_n)^2$, où λ est tel que la fonction $P(z)/Q(z) - \lambda/(1 - \rho z)$ soit holomorphe dans $|z| < 1$; on en déduit le théorème cité.

Ayant été nommé à Bordeaux, j'y ai retrouvé mon ami et collègue J. Dufresnoy qui travaillait sur les fonctions de variable complexe. Avec lui nous avons repris le travail de R. Salem et montré que les fractions rationnelles $A(z)/Q(z)$, où A est un polynôme à coefficients entiers et Q le polynôme défini plus haut, telles que $|A(z)/Q(z)| \leq 1$ sur $|z| = 1$, forment une famille compacte pour la convergence uniforme dans tout compact de $|z| < 1$ ne contenant aucun pôle de ces fonctions. Non seulement on retrouve ainsi le théorème de Salem, mais nous avons pu résoudre affirmativement la conjecture de C. Siegel [14] que le nombre d'or $(1 + \sqrt{5})/2$ est le plus petit élément d'accumulation de S [4]. Nous avons même pu obtenir tous les éléments de S inférieurs à $(1 + \sqrt{5})/2 + \varepsilon$, où ε est un nombre positif assez petit [5]. Cette étude est basée sur une généralisation des méthodes de Schur pour les coefficients des fonctions holomorphes bornées dans $|z| < 1$.

Malgré de nombreuses tentatives, je n'avais pas pu étendre les résultats à d'autres ensembles de nombres algébriques, car si le coefficient du terme

de plus haut degré du polynôme ayant le nombre algébrique pour zéro est $q \geq 2$, les déterminants récurrents de Hankel associés à la série de Taylor de $A(z)/Q(z)$ semblent avoir un dénominateur de la forme q^{n^2} . Ce n'est qu'après un séjour à Philadelphie (U.S.A.) en 1962, où je me suis convaincu de l'efficacité des méthodes d'analyse p -adique, que j'ai pu montrer que ce dénominateur était en réalité q^{2n+1} . Il en résulte que si S_q désigne l'ensemble des nombres algébriques $\alpha > 1$, zéro d'un polynôme P à coefficients entiers, le coefficient du terme de plus haut degré valant $q \geq 1$, n'ayant aucun autre zéro dans $|z| \geq 1$ et pour lequel il existe un polynôme à coefficients entiers A avec $A(1/\alpha) \neq 0$, $A(0) \geq q$ et $|A(z)/Q(z)| \leq 1$ sur $|z| = 1$, où Q désigne le polynôme réciproque de P , alors on a : S_q est un ensemble fermé pour la topologie des nombres réels [12].

M^{me} M. Pathiaux [9] a montré tout récemment que si Σ est l'ensemble des nombres algébriques n'ayant que le conjugué α dans $|z| \geq 1$, alors Σ est la réunion de tous les S_q pour $q \geq 1$. En 1978, M^{me} J. Bertin [1] a découvert encore d'autres sous-ensembles fermés de Σ , dont la réunion forme également Σ . Tout en faisant ainsi progresser l'étude de l'ensemble Σ , de nouvelles questions se posent et je souhaite que de nombreuses découvertes récompensent les chercheurs qui ne se laissent pas décourager. Une constatation réconfortante se dégage de l'évolution passée, à savoir que chaque fois que l'on s'accroche à une question dans ce domaine, elle finit par fournir des résultats; on n'a jamais le sentiment pénible de se trouver devant un mur infranchissable comme cela arrive dans d'autres domaines.

RÉFÉRENCES

- [1] BERTIN, J., M^{me}. A paraître aux *Acta Arithmetica* (1981).
- [2] BOREL, E. *Bull. Sci. Math.* 18 (1894), pp. 22-25.
- [3] DAVID, M. *C.R.Ac. Sci. Paris* 229 (1949), pp. 965-967.
- [4] DUFRESNOY, J. et Ch. PISOT. *Ann. Ec. Norm. Sup. Paris* 70 (1953), pp. 105-133.
- [5] ——— *Ann. Ec. Norm. Sup. Paris* 72 (1955), pp. 69-92.
- [6] FATOU, P. *Acta Math.* 30 (1906), pp. 335-400, voir pp. 368-369.
- [7] JACOBI, C. G. *Journ. f. reine u. angew. Math.* 69 (1868), pp. 29-64; *Œuvres* t. 6, pp. 385-426.
- [8] KLEIN, F. *Nouv. Ann. Math.* 15 (1896), pp. 327-331.
- [9] PATHIAUX, M. M^{me}. *C.R.Ac. Sci. Paris* 284 (1977), pp. 1319-1320.
- [10] PERRON, O. *Gitzber. München* 38 (1908), pp. 181-199.
- [11] PISOT, Ch. *Ann. r. Sc. Norm. Sup. Pisa, Série II*, 7 (1938), pp. 205-248.
- [12] ——— *Ann. Ec. Norm. Sup. Paris* 81 (1964), pp. 165-188.

- [13] SALEM, R. *Duke Math. Journ.* 11 (1944), pp. 103-108.
- [14] SIEGEL, C. L. *Duke Math. Journ.* 11 (1944), pp. 597-602.
- [15] THUE, A. *Norske Vid. Selsk. Skr.* (1912-II), N° 20, pp. 1-15.

(Reçu le 3 janvier 1980)

Charles Pisot

21, rue Ferdinand-Jamin
92340 Bourg-la-Reine
(France)