Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 26 (1980)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: REPRÉSENTATIONS DU GROUPE DE WEIL D'UN CORPS LOCAL

Autor: Henniart, Guy

Kapitel: 3. Exposants et conducteurs

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-51064

Evidemment $\rho(W_F)$ commute à H et l'on a $r.(\pi\circ\rho)(Fr^{mn}) = \pi(\varphi)^{mn}$ $\pi(\varphi_o)^{-mn} = 1_n$, donc $r.(\pi\circ\rho)$ est de type galoisien. C.Q.F.D.

2.7 THÉORÈME 2.7. *Toute représentation projective de* G_F *(resp.* W_F*) possède un relèvement.*

Ce fait est bien connu pour G_F [We 2, p. 2]. Ainsi une représentation projective de type galoisien de W_F a un relèvement de type galoisien.

Pour le cas de W_F (c'est le théorème 1.4 de l'introduction), l'on utilise le théorème 2.2. On a donc une représentation non-ramifiée ρ de W_F, les éléments de $\rho(W_F)$ commutant à ceux de H, et telle que $r.(\pi\circ\rho)$ soit de type galoisien. Il existe un relèvement R de $r.(\pi\circ\rho)$. Mais alors ρ commute à R, puisque les éléments de $\rho(W_F)$ commutent entre eux et à ceux de H. La représentation $R.\rho^{-1}$ est un relèvement de r. C.Q.F.D

3. EXPOSANTS ET CONDUCTEURS

3.1 Si R est une représentation linéaire de W_F, on peut définir, à l'aide de la distribution de Herbrand [We 1, App. I] l'exposant de son conducteur d'Artin, appelé plus brièvement *exposant de* R, et noté $a(R)$. Si R se factorise à travers le groupe fini $G = \mathrm{Gal}(K/F)$, c'est aussi l'exposant, défini dans [Se, p. 107], de la représentation de G que R détermine. Cet exposant ne dépend que de la restriction de R à I_F. Pour une représentation non-ramifiée ρ, on a $a(\rho) = 0$, et si ρ commute à R, on a $a(R) = a(R.\rho)$.

3.2 L'on peut définir, comme dans [Se, p. 83, Rem. 1], les sous-groupes W_F^u de W_F pour $u \in \mathbf{R}$, $u \geqslant -1$: ce sont les sous-groupes de ramification de W_F en numérotation supérieure. Si $G = \mathrm{Gal}(K/F)$ est un quotient fini W_F/W_K de W_F, on a $G^u = W_K W_F^u/W_K$. On a $W_F^{-1} = W_F$, le groupe W_F^o est le groupe d'inertie I_F et le groupe d'inertie sauvage P_F est la fermeture de l'union des W_F^ε pour $\varepsilon > 0$.

Si K est une extension galoisienne finie de F et G son groupe de Galois sur F, nous poserons

$$\alpha(K/F) = \sup\{u \mid G^u \neq 1\} \quad \text{et} \quad \beta(K/F) = \sup\{v \mid G_v \neq 1\}.$$

On a

$$\beta(K/F) = \psi_{K/F}(\alpha(K/F)) \quad \text{et} \quad \alpha(K/F) = \varphi_{K/F}(\beta(K/F))$$

où $\varphi_{K/F}$ et $\psi_{K/F}$ sont les fonctions de Herbrand [Se, p. 80].

3.3 Soit R une représentation linéaire de W_F. Si R est triviale, posons $\alpha(R) = 0$. Sinon, nous noterons $\alpha(R)$ *le plus grand indice* u *tel que l'image de* $R(W_F^u)$ *soit non-triviale.* Un tel $\alpha(R)$ est bien défini: si R est non-ramifiée, on a $R(W_F) \neq 1$ et $R(W_F^\varepsilon) = 1$ pour $\varepsilon > -1$, d'où $\alpha(R) = -1$. Si R est ramifiée, prenons une représentation non ramifiée ρ, commutant à R, et telle que $R \,.\, \rho$ soit galoisienne. Soit K le corps fixé par le noyau de $R \,.\, \rho$. Alors $\alpha(R \,.\, \rho)$ existe et vaut $\alpha(K/F)$. Mais il est clair que pour $u > -1$, on a $R \,.\, \rho(W_F^u) = R(W_F^u)$. Ainsi $\alpha(R)$ est défini et vaut $\alpha(K/F)$.

3.4 Il est bien connu que si χ est un caractère de W_F, alors on a

$$a(\chi) = \alpha(\chi) + 1 \qquad \text{[Se, p. 109, prop. 5].}$$

Nous voulons généraliser cette formule. Nous dirons qu'une représentation linéaire R de W_F *possède la propriété A* si la restriction de R à $W_F^{\alpha(R)}$ est sans point fixe non-trivial.

Il est clair qu'une représentation irréductible R vérifie la propriété A: en effet, comme $W_F^{\alpha(R)}$ est invariant dans W_F, la restriction de R à $W_F^{\alpha(R)}$ a des composantes irréductibles conjuguées entre elles; cette restriction étant non-triviale, aucune composante ne peut être triviale.

3.5 La proposition suivante est une traduction de [Se, p. 108, Cor. 1]:

PROPOSITION 3.5. *Soit* R *une représentation linéaire de* W_F *se factorisant par le groupe fini* $G = \mathrm{Gal}(K/F)$. *Alors on a*

$$a(R) = \frac{1}{|G_o|} \sum_{v=0}^{\infty} |G_v| \operatorname{codim}(V^{G_v}),$$

où V^{G_v} *désigne l'espace des points fixes par le groupe* G_v.

THÉORÈME 3.5. *Soit* R *une représentation linéaire de degré* n *de* W_F, *vérifiant la propriété* A. *Alors on a* $a(R) = n(\alpha(R)+1)$. [1]

Démonstration. C'est clair si R est non-ramifiée. Si R est ramifiée, on peut, par le théorème 2.2, se ramener à R de type galoisien se factorisant par le groupe fini $G = \mathrm{Gal}(K/F)$.

Alors

$$a(R) = \frac{1}{|G_o|} \sum_{v=0}^{\beta} \operatorname{codim}(V^{G_v}) \,.\, |G_v|,$$

[1]) Cette formule avait été signalée, sans démonstration, dans une prépublication de R. Howe.

où $\beta = \beta(K/F)$. Mais on a $G_\beta = W_F^{\alpha(R)} \,.\, W_K/W_K$ et R vérifie la propriété A. Par suite on a $\dim V^{G_\beta} = 0$ et aussi $\dim V^{G_v} = 0$ pour $v \leqslant \beta$. On a donc

$$a(R) = n \sum_{v=0}^{\beta} \frac{|G_v|}{|G_o|} = n\left(1 + \sum_{v=1}^{\beta} \frac{|G_v|}{|G_o|}\right) = n\,(1+\alpha(K/F)),$$

d'où $a(R) = n(1+\alpha(R))$. C.Q.F.D.

3.6 Corollaire 1. *Soient R et S deux représentations linéaires de W de degrés n et m respectivement. Supposons que R, S et $R \otimes S$ vérifient la propriété A. Alors on a $a(R \otimes S) \leqslant \sup(ma(R), na(S))$ avec égalité si $ma(R) \neq na(S)$.*

Rappelons qu'une représentation linéaire est dite *primordiale* si l'on ne peut abaisser son exposant en la tordant par un caractère. Le corollaire 2 implique immédiatement le théorème 1.5.

Corollaire 2. *Soit R une représentation linéaire de W_F, primordiale, de degré n, et vérifiant la propriété A. Soit χ un caractère de W_F. Alors on a $a(R \otimes \chi) = \sup(a(R), na(\chi))$.*

3.7 *Démonstration des corollaires.* Le théorème 3.5 nous permet d'écrire

$$\alpha(R) + 1 = \frac{a(R)}{n} \qquad \text{et} \qquad \alpha(S) + 1 = \frac{a(S)}{m}\,.$$

Mais il est clair que l'on a $\alpha(R \otimes S) \leqslant \sup(\alpha(R), \alpha(S))$, avec l'égalité si $\alpha(R) \neq \alpha(S)$. On en déduit le corollaire 1. Prenant $S = \chi$, on obtient le corollaire 2, puisque, par hypothèse, on a toujours $a(R \otimes \chi) \geqslant a(R)$. C.Q.F.D.

Une conséquence immédiate du corollaire 2 est la remarque suivante:

Remarque 3.7. Soit R une représentation linéaire de W_F, irréductible et de degré n. Si $a(R)$ n'est pas multiple de n, R est primordiale.

4. Caractères centriques

4.1 *Rappel et notations.* Si L est une extension finie de F, nous noterons $\tau_L : W_L \to L^\times$ l'application de *réciprocité* définie par la théorie du corps de classes local. On sait qu'elle donne une bijection entre les caractères de $L^\times$ et ceux de W_L, par la formule $\chi \to \chi \circ \tau_L$.