

<b>Zeitschrift:</b>	L'Enseignement Mathématique
<b>Herausgeber:</b>	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
<b>Band:</b>	26 (1980)
<b>Heft:</b>	1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
 <b>Artikel:</b>	REPRÉSENTATIONS DU GROUPE DE WEIL D'UN CORPS LOCAL
<b>Autor:</b>	Henniart, Guy
<b>Kapitel:</b>	1. Introduction
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-51064">https://doi.org/10.5169/seals-51064</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# REPRÉSENTATIONS DU GROUPE DE WEIL D'UN CORPS LOCAL

par Guy HENNIART

## 0. RÉSUMÉ

Soient  $F$  un corps local non archimédien,  $\bar{F}$  une clôture séparable algébrique de  $F$ , et  $W_F$  le groupe de Weil de  $\bar{F}$  sur  $F$ . Soit  $r$  une représentation projective de  $W_F$ . Nous montrons l'existence de représentations linéaires relevant  $r$  et nous étudions leurs propriétés. Si  $r$  est primitive, nous déterminons une borne inférieure pour l'exposant du conducteur d'Artin de ces relèvements.

## 1. INTRODUCTION

1.1 Soit  $F$  un corps local non archimédien, à corps résiduel fini de caractéristique  $p$ . Soient  $\bar{F}$  une clôture séparable algébrique de  $F$ , et  $W_F$  le groupe de Weil de  $\bar{F}$  sur  $F$  [We 1, app. II].

La théorie du corps de classes local donne une bijection entre les caractères de  $W_F$ , i.e. ses représentations continues de degré 1, et les caractères du groupe multiplicatif  $F^\times$  de  $F$ .

1.2 R. P. Langlands conjecture qu'il y a une correspondance analogue entre les (classes d'isomorphismes de) représentations irréductibles de  $W_F$  dans  $GL(n, \mathbf{C})$  et les (classes d'isomorphisme de) représentations supercuspidales de  $GL(n, F)$ <sup>1)</sup>. Cette correspondance, entre autres propriétés, doit conserver les facteurs  $L$  et  $\varepsilon$ , ainsi que les conducteurs.

De même, il existerait un tel lien entre les représentations irréductibles de  $W_F$  dans  $SL(n, \mathbf{C})$  (resp.  $PGL(n, \mathbf{C})$ ), et les représentations supercuspidales de  $PGL(n, F)$  (resp.  $SL(n, F)$ ) [Bo].

1.3 En fait cette conjecture n'est établie que pour  $n = 2$ , [JL, Ku, Tu, Yo, Ca, Ge]. On ne possède que des renseignements partiels pour  $n > 2$  [Co].

<sup>1)</sup> Ici, comme dans toute la suite, par représentation nous entendons représentation continue.

1.4 Nous étudierons ici les représentations de degré  $n$  de  $W_F$  (le versant dit « galoisien » des conjectures de Landglands) en suivant pour cela la méthode d'A. Weil [We 2].

Elle consiste à déterminer d'abord les représentations *projectives*  $r : W_F \rightarrow PGL(n, \mathbf{C})$ , puis à trouver les représentations linéaires  $R : W_F \rightarrow GL(n, \mathbf{C})$  *relevant r*, c'est-à-dire telles que l'on ait  $\pi \circ R = r$ , où  $\pi$  est la projection de  $GL(n, \mathbf{C})$  sur  $PGL(n, \mathbf{C})$

$$\begin{array}{ccc} & W_F & \\ R \swarrow & & \downarrow r \\ GL(n, \mathbf{C}) & \xrightarrow{\pi} & PGL(n, \mathbf{C}) \end{array}$$

Nous démontrerons, au chapitre 2, le théorème suivant:

**THÉORÈME 1.4.** *Toute représentation projective de  $W_F$  possède un relèvement.*

Ce théorème était déjà connu pour les représentations projectives irréductibles de  $W_F$  [We 2, p. 3]. En fait, nous pourrions même obtenir des précisions sur le déterminant des relèvements [He, ch. 5].

1.5 Les différents relèvements d'une représentation projective donnée  $r$  diffèrent par torsion par un caractère. Notre but est d'étudier les conducteurs d'Artin de ces relèvements.

Si  $R$  est une représentation linéaire de  $W_F$ , nous noterons  $a(R)$  l'exposant de son conducteur d'Artin, plus brièvement appelé *exposant* de  $R$ ; le conducteur d'Artin de  $R$  est alors  $c(R) = \mathfrak{p}_F^{a(R)}$ , où  $\mathfrak{p}_F$  est l'idéal maximal des entiers  $\mathfrak{o}_F$  de  $F$ .

Une représentation linéaire est dite *primordiale* si l'on ne peut abaisser son exposant par torsion par un caractère.

**THÉORÈME 1.5.** *Soit  $R$  une représentation linéaire de  $W_F$ , irréductible, primordiale et de degré  $n$ . Soit  $\chi$  un caractère de  $W_F$ . Alors on a*

$$a(R \otimes \chi) = \sup(a(R), na(\chi)).$$

La démonstration de ce théorème utilise la formule  $a(R) = n(\alpha(R) + 1)$ , valable pour une représentation irréductible et de degré  $n$ , où  $\alpha(R)$  désigne le plus grand indice  $u$  tel que  $R$  soit non-triviale sur  $W_F^u$ , le sous-groupe de ramification de  $W_F$  d'indice  $u$  en numérotation supérieure.

1.6 Une représentation projective irréductible de  $W_F$  est de *type galoisien*, i.e. d'image finie. Nous sommes plus particulièrement intéressés par celles dont, en outre, aucun relèvement n'est une représentation induite: on les appelle primitives. Ces représentations ont été étudiées par H. Koch [Ko]. En particulier, l'on sait que leur degré est une puissance de la caractéristique résiduelle  $p$  de  $F$ . On appellera *corps centrique* d'une représentation projective  $r$  de type galoisien, l'extension  $K$  de  $F$  fixée par le noyau de  $r$ : elle est finie et galoisienne sur  $F$ .

Soit  $F_1$  l'extension modérément ramifiée de  $F$ , incluse dans  $K$ , et maximale pour ces propriétés. Nous noterons  $r_1$  la restriction de  $r$  à  $W_{F_1}$ . Si  $r$  est primitive,  $r_1$  est irréductible [Ko].

1.7 Nous appellerons *exposant* d'une représentation projective  $r$  et nous noterons  $a(r)$  le minimum des exposants des relèvements de  $r$ .

THÉORÈME 1.7. *Si  $r$  est une représentation projective primitive de degré  $p^d$  de  $W_F$ , les exposants de  $r$  et de  $r_1$  vérifient l'égalité suivante :*

$$e a(r) = (e - 1)p^d + a(r_1),$$

où  $e$  est l'indice de ramification de  $F_1$  sur  $F$ .

Ce théorème est la généralisation de [Bu, Claim 1', p. 29], qui traitait le cas  $d = 1$ . Ce résultat et le suivant doivent beaucoup à un travail effectué en commun avec J. Buhler au cours de l'été 1977. Les démonstrations s'appuient essentiellement sur les méthodes et les résultats de [Bu]:

THÉORÈME 1.8. *Soit  $\alpha = \sup \{ u \mid r(W_F^u) \neq 1 \}$ . Alors l'exposant  $a(r)$  de  $r$  vérifie l'inégalité suivante :*

$$a(r) \geqslant p^d + (p^d + 1)\alpha.$$

Pour  $d = 1$ , on a même l'égalité  $a(r) = p + (p+1)\alpha$ . Ce résultat est dû à J. Buhler [Bu, Thm. 4, p. 25].

Y a-t-il égalité dans le théorème précédent lorsque  $d > 1$ ? Cette question n'est pas résolue à présent.

1.9 Cet article est une version condensée d'une thèse de 3<sup>e</sup> cycle soutenue à Orsay en juin 1978 [He]. Cette thèse a été effectuée sous la direction de M. Cartier. Qu'il trouve ici exprimée ma reconnaissance pour l'aide qu'il m'a apportée.