**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique

**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

**Band:** 26 (1980)

**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** OPÉRATIONS D'ADAMS ET REPRÉSENTATIONS DE GROUPES

**Autor:** Kratzer, Ch.

**Kapitel:** 3. Le pré--anneau $R_A(H)$

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-51063

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 15.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

2.2. La donnée d'un $A(GL_n)$-comodule $E$ fournit pour toute $A$-algèbre $A'$ un $A'[GL_n(A')]$-module par:

$$A'[GL_n(A')] \otimes_A E \xrightarrow{id \otimes d_E} A'[GL_n(A')] \otimes_A A(GL_n) \otimes E \xrightarrow{év \otimes id} A' \otimes_A E$$

où $év : A'[GL_n(A')] \otimes_A A(GL_n) \to A'$ est l'homomorphisme d'évaluation. Par suite, on a des *homomorphismes d'anneaux canoniques*

$$e_{A'} : R_A(GL_n) \to R_{A'}(GL_n(A')) \, ; \; E \mapsto A' \otimes_A E \, .$$

*Remarque.* D'une manière générale, si $H$ est une algèbre de Hopf qui est de plus un $A$-module plat, on notera $R_A(H)$ le groupe de Grothendieck de la catégorie $\mathscr{P}_A(H)$ des $H$-comodules qui sont projectifs de type fini en tant que $A$-modules. Comme pour $R_A(GL_n)$, on montre que $R_A(H)$ est un anneau commutatif avec unité. Nous utiliserons les algèbres de Hopf

$$A(M_n) = A[X_{11}, \ldots, X_{nn}], A(T_n)$$
$$= A[X_1, \ldots, X_n], A(M_n \times M_m) = A[X_{11}, \ldots, X_{nn}; Y_{11}, \ldots, Y_{mm}] \, ,$$

dont les groupes de Grothendieck $R_A(H)$ s'interprètent comme représentations polynomiales de $M_n$ ($n \times n$ matrices), $T_n$ (matrices diagonales) et $M_n \times M_m$ respectivement.

## 3. Le pré-$\lambda$-anneau $R_A(H)$

*Définition* 3.1 [1], [2]. *Un pré-$\lambda$-anneau ($\lambda$-ring) $R$ est un anneau commutatif avec unité, muni d'une suite d'opérations $\{\lambda^n\}_{n \geq 0}$ vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) $\lambda^0(x) = 1$ et $\lambda^1(x) = x$

(ii) $\lambda^k(x+y) = \sum_{i=0}^k \lambda^i(x) \cdot \lambda^{k-i}(y)$.

En introduisant les séries formelles $\lambda_t(x) = \sum_{i=0}^\infty \lambda^i(x) t^i$ et

$$\psi_{-t}(x) = -t \frac{d}{dt}(\log \lambda_t(x)) = -t \left(\frac{d}{dt} \lambda_t(x)\right)(\lambda_t(x))^{-1} \, ,$$

on définit une suite d'opérations $\psi^k : R \to R, \; k > 0$ *(opérations d'Adams)* par

$$\psi_{-t}(x) = \sum_{i=1}^\infty (-1)^i \psi^i(x) t^i \, .$$

On vérifie immédiatement que les opérations $\psi^k$ sont des endomorphismes de groupe et que $\psi^1(x) = x$. D'autre part, on tire de la définition la formule [1]:

$$(*)\ \psi^k - \psi^{k-1} \cdot \lambda^1 + \ldots + (-1)^{k-1}\psi^1 \cdot \lambda^{k-1} + (-1)^k k\lambda^k = 0$$

qui peut servir de définition par récurrence des opérations d'Adams. Si $x$ est de rang 1, c'est-à-dire $\lambda_t(x) = 1 + xt$, on vérifie par induction sur $k$ à l'aide de la formule (*) que $\psi^k(x) = x^k$.

Si $H$ est une $A$-algèbre de Hopf qui est de plus un $A$-module plat, nous allons définir des opérations $\lambda^k$ sur $R_A(H)$. Soient $E \in \mathscr{P}_A(H)$ et $k \geqslant 1$ entier. On considère la $k$-ième puissance tensorielle $E^k = E \otimes_A \ldots \otimes_A E$ ($k$ facteurs) munie de la structure de $H$-comodule

$$E \otimes \ldots \otimes E \xrightarrow{d_E \otimes \ldots \otimes d_E} H \otimes \ldots \otimes H \otimes E \otimes \ldots \otimes E \xrightarrow{m \otimes id} H \otimes E \otimes \ldots \otimes E$$

où $m$ est la multiplication de $k$ facteurs dans l'algèbre de Hopf $H$ (si $H = A(GL_n)$, $m$ est induite par la diagonale $\Delta : GL_n \to GL_n \times \ldots \times GL_n$). Le sous-module de $E^k$ engendré par les $x_1 \otimes \ldots \otimes x_k$ où $x_i = x_j$ pour un $i \neq j$, est muni d'une structure de $H$-sous-comodule de $E^k$ : si $d_E(x) = \sum c_l \otimes x_l$, $m\,[(d_E \otimes d_E)(x \otimes x)] = m\,[(\sum c_l \otimes x_l) \otimes (\sum c_l \otimes x_l)] = \sum c_i^2 \otimes x_i \otimes x_i + \sum_{r<s} c_r c_s \otimes (x_r \otimes x_s + x_s \otimes x_r)$. Par passage au quotient, on obtient un $H$-comodule $\lambda^k E$ *($k$-ième puissance extérieure)*.

On convient que $\lambda^0 E = A$ ($H$-comodule trivial défini par $d_A(1) = 1 \otimes 1$). On vérifie que $\lambda^k E \in \mathscr{P}_A(H)$ au moyen de la formule classique sur les $A$-modules

$$\lambda^k(E \oplus F) \simeq \oplus_{i=0}^{k} \lambda^i E \otimes \lambda^{k-i} F$$

car il est clair que les puissances extérieures de modules libres sont des modules libres.

Si $1 + R_A(H)\,[[t]]^+$ désigne le groupe multiplicatif des séries formelles sur $R_A(H)$ de terme constant 1, il s'avère que la formule

$$\lambda_t\{E\} = \sum_{i=0}^{\infty} [\lambda^i E]\, t^i$$

sur les générateurs de $R_A(H)$ induit un homomorphisme de groupes

$$\lambda_t : R_A(H) \to 1 + R_A(H)\,[[t]]^+$$

et par suite une structure de pré-$\lambda$-anneau sur $R_A(H)$. Le point essentiel de la démonstration est le

LEMME 3.2. *Si* $0 \to V \to W \to V' \to 0$ *est exacte dans* $\mathscr{P}_A(H)$, *alors*

$$[\lambda^k W] = \sum_{i=0}^{k} [\lambda^i V] \cdot [\lambda^{k-i} V'] \quad \textit{dans} \quad R_A(H)$$

*c'est-à-dire* $\lambda_t : R_A(H) \to 1 + R_A(H)\,[[t]]^+$ *est bien définie.*

*Preuve.* Soit $f : W^m \to \lambda^m W$ la projection canonique. En tensorisant la suite $0 \to V \to W \to V' \to 0$ suffisamment de fois par $V$ et $W$, on obtient une filtration

$$0 \subset V^m \subset V^{m-1} \otimes W \subset \dots \subset V^i \otimes W^{m-i} \subset \dots \subset W^m .$$

L'image par $f$ de cette filtration $f(V^i \otimes W^{m-i}) = W_i$ est une filtration du $H$-comodule $\lambda^m W$ ($W_i$ coïncide avec le sous-module engendré par les $x_1 \wedge \dots \wedge x_m$ ayant au moins $i$ facteurs dans $V$). On va montrer d'une part que

$$W_i/W_{i+1} \simeq \lambda^i V \otimes \lambda^{m-i} V' \text{ (en tant que } H\text{-comodules)}$$

et d'autre part que les $W_i$ sont des objets de $\mathscr{P}_A(H)$. Alors, par définition du produit dans $R_A(H)$, on a

$$[\lambda^i V] \cdot [\lambda^{m-i} V'] = [\lambda^i V \otimes \lambda^{m-i} V']$$

et d'autre part, on aura (en posant $W_{m+1} = 0$)

$$[\lambda^m W] = \sum_{i=0}^{m} [W_i/W_{i+1}] .$$

Le lemme suit alors directement de ces considérations. Pour montrer l'isomorphisme $W_i/W_{i+1} \simeq \lambda^i V \otimes \lambda^{m-i} V'$, on considère le diagramme

$$\begin{tikzcd}
V^i \otimes W^{m-i} \arrow[rr, "f"] \arrow[d, "p_i"] & & W_i \arrow[d] \\
V^i \otimes V'^{\,m-i} \arrow[rr, "f'"] \arrow[dr] & & W_i / W_{i+1} \\
& \lambda^i V \otimes \lambda^{m-i} V' \arrow[ur, "f''"] &
\end{tikzcd}$$

où $p_i$ est induit par la projection $p : W \twoheadrightarrow V'$.

Il est clair que $f$ induit les homomorphismes de $H$-comodules $f'$ et $f''$. Pour vérifier que $f''$ est un isomorphisme, il suffit de vérifier que $f''$ est un isomorphisme de $A$-modules. Mais, en tant que $A$-modules, $W \simeq V$

$\oplus V'$, donc $\lambda^m W \simeq \oplus_{i=0}^m \lambda^i V \otimes \lambda^{m-i} V'$, et via cet isomorphisme, $W_i / W_{i+1}$ s'identifie à $\lambda^i V \otimes \lambda^{m-i} V'$.

Enfin, les suites exactes

$$0 \to W_{i+1} \to W_i \to W_i / W_{i+1} \to 0$$

montrent par induction que les $W_i$ sont $A$-projectifs de type fini pour $i = 0, 1, \ldots, m+1$. $\square$

On déduit immédiatement du lemme 3.2 que les opérations $\lambda^k$ définissent une structure de pré-$\lambda$-anneau sur $R_A(H)$ (donc en particulier sur $R_A(GL_n)$, $R_A(M_n)$, $R_A(T_n)$, $R_A(M_n \times M_n)$ etc.).

*Remarques.* (1) En suivant exactement la même démarche, on munit les anneaux $R_A(G)$ d'une structure de pré-$\lambda$-anneau ($\lambda^k$ est la $k$-ième puissance extérieure munie de l'action diagonale de $G$), naturelle vis-à-vis des homomorphismes de restriction et d'extension des scalaires, et compatibles avec les homomorphismes canoniques définis sous 2.2

$$e_{A'} : R_A(GL_n) \to R_{A'}\big(GL_n(A')\big)$$

(2) Le *dual* $V^* = \mathrm{Hom}_A(V, A)$, muni de l'action de $G$ définie par

$$(g \cdot f)(x) = f(g^{-1} \cdot x)$$

induit une involution de pré-$\lambda$-anneau sur $R_A(G)$. On en déduit des *opérations d'Adams d'indice négatif*

$$\psi^{-k}(x) = \psi^k(x^*) = \big(\psi^k(x)\big)^*, \qquad k > 0\,.$$

Ces opérations vérifient aussi la condition $\psi^{-k}[P] = [P]^{-k}$, $k > 0$ sur les éléments de rang 1 (pour autant que la notation $[P]^{-1}$ ait un sens, c'est-à-dire $[P]$ inversible), ce qui justifie leur appellation.

On dit qu'un $H$-comodule $E \neq 0$ est *simple* s'il ne possède pas de sous-comodule propre; $E$ est dit *semi-simple* s'il est somme directe de sous-comodules simples.

LEMME 3.3. *Si $F$ est un corps, le groupe de Grothendieck $R_F(H)$ s'identifie au groupe abélien libre sur l'ensemble des classes d'isomorphisme de $H$-comodules simples.*

*Preuve.* Comme les espaces vectoriels de dimension finie sont de longueur finie, tout objet de $\mathscr{P}_F(H)$ est a fortiori de longueur finie. Maintenant, comme la catégorie $\mathscr{P}_F(H)$ est abélienne, le théorème de Jordan-Hölder [5] s'applique et le lemme en résulte.

Corollaire 3.4. *Si* $k$ *est un corps de caractéristique nulle, ou bien un corps fini, et* $K/k$ *une extension de corps, alors l'extension des scalaires* $i : R_k(GL_n) \to R_K(GL_n)$ *est injective.*

*Preuve.* Soient $E$, $E'$ deux $k(GL_n)$-comodules simples non isomorphes. Au moyen de l'isomorphisme classique:

$$K \otimes_k \mathrm{Hom}_k(E, E') \simeq \mathrm{Hom}_K(K \otimes_k E, K \otimes_k E')$$

On montre que

$$K \otimes \mathrm{Hom}^{k(GL_n)}(E, E') \simeq \mathrm{Hom}^{K(GL_n)}(K \otimes_k E, K \otimes_k E')$$

donc le second membre est nul. D'autre part le comodule $K \otimes_k E$ est semi-simple, car son anneau d'endomorphismes est $K \otimes {}_k D_E$, où $D_E$ est le corps $\mathrm{End}^{K(GL_n)}(E)$, donc semi-simple ([4], l'un des deux corps est séparable sur $k$ en vertu des hypothèses). Alors, la formule $\mathrm{Hom}^{K(GL_n)}$ $(K \otimes_k E, K \otimes_k E') = 0$ montre que $K \otimes {}_k E$ et $K \otimes {}_k E'$ sont sans facteur simple commun. $\square$

Lemme 3.5. *Si* $K$ *est un corps infini, l'homomorphisme canonique défini sous 2.2 :* $e_K : R_K(GL_n) \to R_K(GL_n(K))$ *(envoyant le* $K(GL_n)$*-comodule* $E$ *sur le* $K[GL_n(K)]$*-module associé* $E$*) est injectif.*

*Preuve.* En vertu du lemme 3.3, il s'agit de montrer que deux comodules simples non isomorphes ont pour image deux modules simples non isomorphes. Comme $GL_n(K)$ est un ouvert dense de $M_n(K)$ ($nxn$-matrices) pour la topologie de Zariski, le lemme suit du résultat classique: « Si la fonction polynomiale associée à un polynôme $P(X_1, \ldots, X_n)$ est identiquement nulle sur un anneau intègre infini, alors le polynôme $P$ est nul. » $\square$

*Remarques.* (1) Pour un corps algébriquement clos, on peut parler du groupe algébrique $GL_n(K)$ et de l'anneau $R_K^{alg}(GL_n(K))$ des représentations algébriques de $GL_n(K)$. Ce dernier coïncide avec $R_K(GL_n)$.

(2) En exploitant ce point de vue, J.-P. Serre [9] montre en particulier que les homomorphismes d'extension des scalaires:

$i : R_{\mathbf{Z}}(GL_n) \xrightarrow{\sim} R_{\mathbf{Q}}(GL_n)$ et $i' : R_{\mathbf{Z}}(GL_n \times GL_m) \xrightarrow{\sim} R_{\mathbf{Q}}(GL_n \times GL_m)$ sont des isomorphismes (il établit en premier lieu une suite exacte

$$\oplus_p R_{\mathbf{F}_p}(H) \xrightarrow{i} R_{\mathbf{Z}}(H) \xrightarrow{j} R_{\mathbf{Q}}(H) \to 0$$

[9, théorème 1] pour toute algèbre de Hopf $H$, puis il montre la surjectivité des homomorphismes de décomposition

$$d_p : R_{\mathbf{Q}}(GL_n) \to R_{\mathbf{F}_p}(GL_n) \text{ et } d'_p : R_{\mathbf{Q}}(GL_n \times GL_m) \to R_{\mathbf{F}_p}(GL_n \times GL_m).$$

Par construction $j_p o d_p = 0$; il s'ensuit que $i$ et $i'$ sont des isomorphismes [9, théorèmes 3 et 5]).

LEMME 3.6. *Soit $p$ un nombre premier. L'homomorphisme canonique*

$$e_p : R_{\mathbf{F}_p}(GL_n) \to \prod_{m \geq 1} R_{\mathbf{F}_{p^m}}(GL_n(\mathbf{F}_{p^m}))$$

*est injectif.*

*Preuve.* Suit du résultat classique « Si la fonction polynomiale associée à un polynôme $P(X_1, ..., X_n)$ de degré $q$ est identiquement nulle sur un corps contenant au moins $q + 1$ éléments, alors $P$ est identiquement nul ». □

Si $A$ est un anneau de caractéristique $p > 0$, on désignera par Frob l'*homomorphisme de Frobenius* de $A$ défini par $x \mapsto x^p$.

COROLLAIRE 3.7. *Si $A$ est un anneau de caractéristique $p > 0$, alors*

$$\psi^p = \mathrm{Frob}_* : R'_A(G) \to R'_A(G).$$

*($R'_A(G)$ désigne le groupe de Grothendieck de la catégorie $\mathscr{L}_A^G$ des $AG$-modules $A$-libres de type fini.)*

*Preuve.* Comme tout objet $V$ de $\mathscr{L}_A^G$ est de la forme $V = \rho^*(A_{id}^n)$, il suffit par naturalité de montrer:

$$\psi^p [A_{id}^n] = \mathrm{Frob}_* [A_{id}^n] \in R_A(GL_n(A)).$$

Comme $[A_{id}^n]$ est dans l'image de l'homomorphisme canonique $e_A$ : $R_A(GL_n) \to R_A(GL_n(A))$ de pré-$\lambda$-anneaux, il suffit de montrer

$$\psi^p = \mathrm{Frob}_* : R_A(GL_n) \to R_A(GL_n).$$

Par le lemme 3.6, on se réduit encore à montrer

$$\psi^p = \mathrm{Frob}_* : R_{\mathbf{F}_{p^m}}(GL_n(\mathbf{F}_{p^m})) \to R_{\mathbf{F}_{p^m}}(GL_n(\mathbf{F}_{p^m})).$$

Cette dernière égalité s'obtient facilement à partir de [7]. □