Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 26 (1980)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: OPÉRATIONS D'ADAMS ET REPRÉSENTATIONS DE GROUPES

Autor: Kratzer, Ch.

Kapitel: 2. Représentations polynomiales de GL_n

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-51063

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 21.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Ainsi, la généralisation des modules libres aux modules projectifs se traduit par une structure supplémentaire: l'action de $K_0(A)$ sur l'idéal d'augmentation.

(2) Si V est une représentation de G sur A de forme matricielle $\rho : G \to GL_n(A)$, on peut considérer $\rho^* : R_A(GL_n(A)) \to R_A(G)$ et alors

$$[V] = \rho^* [A^n_{id}]$$

où $[A^n_{id}]$ est la classe de la représentation $id : GL_n(A) \to GL_n(A)$. De ce point de vue, les groupes $GL_n(A)$ jouent un rôle universel pour les représentations. Nous allons donc étudier maintenant un type particulier de représentations de $GL_n(A)$.

2. Représentations polynomiales de GL_n

Soit A un anneau commutatif avec unité. On considère le foncteur

$$GL_n : \mathscr{A}lg_A \to \mathscr{G}r \; ; \; A' \mapsto GL_n(A')$$

de la catégorie des A-algèbres commutatives avec unité dans celle des groupes. Une *représentation polynomiale* de GL_n sur l'anneau A est une transformation naturelle de foncteurs

$$\rho : GL_n \to GL_m$$

déterminée par une famille de polynômes $\rho_{ij}(X_{11}, \ldots, X_{nn}, \det(X)^{-1})$ $(1 \leqslant i, j \leqslant m)$ à coefficients dans A comme suit:

$$\rho_{A'} : GL_n(A') \to GL_m(A')$$

est définie par les fonctions polynomiales ρ_{ij} sur A'.

Exemple. La puissance extérieure $\lambda^2 : GL_2 \to GL_1$ est une représentation polynomiale sur $\mathbf{Z}$ définie par la fonction polynomiale

$$\rho(X_{11}, X_{12}, X_{21}, X_{22}) = X_{11}X_{22} - X_{12}X_{21} .$$

Comme $GL_n(A)$ est un groupe algébrique affine, son algèbre affine

$$A(GL_n) = A[X_{11}, \ldots, X_{nn}, \det(X)^{-1}]$$

(algèbre des fonctions polynomiales sur GL_n) est une *algèbre de Hopf* (la multiplication $GL_n \times GL_n \to GL_n$ induit la comultiplication

$$A(GL_n) \to A(GL_n \times GL_n) = A(GL_n) \otimes A(GL_n)) .$$

Soit E un A-module. Une structure de $A(GL_n)$-comodule sur E est la donnée d'un homomorphisme A-linéaire

$$d_E : E \to A(GL_n) \otimes_A E$$

vérifiant les axiomes duaux d'une structure de module. Un *homomorphisme* de $A(GL_n)$-comodules $f : E \to E'$ est une application A-linéaire compatible avec d_E et $d_{E'}$. L'ensemble

$$\mathrm{Hom}^{A(GL_n)}(E, E')$$

des homomorphismes de $A(GL_n)$-comodules est donc un sous-ensemble de $\mathrm{Hom}_A(E, E')$ des applications A-linéaires. On montre alors que la catégorie des $A(GL_n)$-comodules est abélienne [9] (pour l'existence de noyaux, on utilise le fait que $A(GL_n)$ est un A-module plat, ce qui assure que si $E \subset E'$, alors $A(GL_n) \otimes E \subset A(GL_n) \otimes E'$).

LEMME 2.1. *La donnée d'une classe de conjugaison par des matrices de* $GL_m(A)$ *d'une représentation polynomiale* $\rho : GL_n \to GL_m$ *est équivalente à celle d'une classe d'isomorphisme de* $A(GL_n)$*-comodules* A*-libres de rang* m.

Preuve. La correspondance est donnée par la formule

$$d_E(e_i) = \sum_{j=1}^m \rho_{ji}(X_{11}, \ldots, X_{nn}, \det(X)^{-1}) \otimes e_j$$

où $\{e_1, \ldots, e_m\}$ est une A-base de A^m. $\square$

Soit $\mathcal{P}_A(GL_n)$ la sous-catégorie pleine de la catégorie des $A(GL_n)$-comodules formée des comodules qui sont *projectifs de type fini en tant que* A*-modules* (généralisation des représentations polynomiales de GL_n). On note alors $R_A(GL_n)$ le groupe de Grothendieck de $\mathcal{P}_A(GL_n)$ (quotient du groupe abélien libre sur les classes d'isomorphisme d'objets $\{E\}$ de $\mathcal{P}_A(GL_n)$ par les relations $\{E\} = \{E'\} + \{E''\}$ associées aux suites exactes $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$. Le produit tensoriel sur $A : (E, E') \mapsto E \otimes_A E'$ muni de la structure de comodule

$$E \otimes E' \xrightarrow{d_E \otimes d_{E'}} A(GL_n) \otimes A(GL_n) \otimes E \otimes E' \xrightarrow{m \otimes id} A(GL_n) \otimes E \otimes E'$$

(où m est la multiplication de l'algèbre de Hopf $A(GL_n)$ induite par la diagonale $\Delta : GL_n \to GL_n \times GL_n$) préserve les suites exactes de A-modules projectifs et induit une structure d'anneau commutatif avec unité sur $R_A(GL_n)$ (l'unité est la classe du $A(GL_n)$-comodule A défini par $d_A(1) = 1 \otimes 1$).

2.2. La donnée d'un $A\,(GL_n)$-comodule E fournit pour toute A-algèbre A' un $A'\,[GL_n\,(A')]$-module par:

$$A'\left[GL_n(A')\right] \otimes_A E \xrightarrow{id \otimes d_E} A'\left[GL_n(A')\right] \otimes_A A\,(GL_n) \otimes E \xrightarrow{\acute{e}v \otimes id} A' \otimes_A E$$

où $\acute{e}v : A'\,[GL_n\,(A')] \otimes_A A\,(GL_n) \to A'$ est l'homomorphisme d'évaluation. Par suite, on a des *homomorphismes d'anneaux canoniques*

$$e_{A'} : R_A(GL_n) \to R_{A'}(GL_n(A'))\,;\; E \mapsto A' \otimes_A E\,.$$

Remarque. D'une manière générale, si H est une algèbre de Hopf qui est de plus un A-module plat, on notera $R_A\,(H)$ le groupe de Grothendieck de la catégorie $\mathscr{P}_A\,(H)$ des H-comodules qui sont projectifs de type fini en tant que A-modules. Comme pour $R_A\,(GL_n)$, on montre que $R_A\,(H)$ est un anneau commutatif avec unité. Nous utiliserons les algèbres de Hopf

$$A\,(M_n) = A\,[X_{11}, ..., X_{nn}],\, A\,(T_n)$$
$$= A\,[X_1, ..., X_n],\, A\,(M_n \times M_m) = A\,[X_{11}, ..., X_{nn};\, Y_{11}, ..., Y_{mm}]\,,$$

dont les groupes de Grothendieck $R_A\,(H)$ s'interprètent comme représentations polynomiales de M_n ($n \times n$ matrices), T_n (matrices diagonales) et $M_n \times M_m$ respectivement.

3. Le pré-λ-anneau $R_A\,(H)$

Définition 3.1 [1], [2]. *Un pré-λ-anneau (λ-ring) R est un anneau commutatif avec unité, muni d'une suite d'opérations $\{\lambda^n\}_{n \geq 0}$ vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) $\lambda^0\,(x) = 1$ et $\lambda^1\,(x) = x$

(ii) $\lambda^k\,(x+y) = \sum_{i=0}^{k} \lambda^i\,(x) \cdot \lambda^{k-i}\,(y)\,.$

En introduisant les séries formelles $\lambda_t\,(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i\,(x)\,t^i$ et

$$\psi_{-t}(x) = -\,t\,\frac{d}{dt}(\log \lambda_t(x)) = -\,t\left(\frac{d}{dt}\,\lambda_t(x)\right)(\lambda_t\,(x))^{-1}\,,$$

on définit une suite d'opérations $\psi^k : R \to R,\; k > 0$ *(opérations d'Adams)* par

$$\psi_{-t}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \psi^i\,(x)\,t^i\,.$$