III. Spezielle Ergebnisse in kleinen Dimensionen

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1980)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **27.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

III. Spezielle Ergebnisse in kleinen Dimensionen

Das Hauptinteresse in dieser Periode lag ganz offensichtlich in der expliziten Berechnung der Isomorphieklassen der Algebren einer festen Dimension, nicht jedoch in einer allgemeinen Strukturtheorie. Dabei wurde, wie im letzten Abschnitt erwähnt, immer eine der verschiedenen typischen Normalformen zugrundegelegt, mittels Invarianten, wie Ordnung und Geschlecht, eine grobe Klasseneinteilung vorgenommen und diese genauer untersucht. Leider sind jedoch die meisten der Tabellen nicht korrekt: entweder sie sind nicht vollständig oder sie enthalten auch nicht-assoziative Algebren, oder schließlich sind einige der aufgeführten Algebren isomorph. Wir wollen auf einige der Fehler hinweisen, nicht aber die Randbemerkung von Scheffers in [35] vergessen.

„Die nachfolgenden der Systeme sind mit aller bei so umfangreicher Rechnung erforderlichen Sorgfalt bestimmt und von den überzähligen gesäubert worden. Sollten sich doch noch Fehler finden, was der Verfasser nicht vermuthet, so bittet derselbe um Nachsicht.“ Die Klassifikation der Algebren bis zur Dimension vier ist in [47] enthalten. Wir hatten schon erwähnt, daß Study eine Algebra in der Dimension vier ausgelassen hatte, die Tabellen der Algebren kleinerer Dimensionen sind dagegen vollständig. Im Jahre 1890 bearbeiteten Scheffers [35] und unabhängig davon Rohr [33] den Fall der fünf-dimensionalen Algebren. Wir wollen kurz auf die Scheffersche Klassifikation der kommutativen Algebren eingehen. Es gibt genau zwanzig Isomorphieklassen von kommutativen Algebren. Scheffers erhält 21 und tatsächlich sind die folgenden zwei lokalen Algebren isomorph. Sei $x_1, \ldots, x_4$ eine Basis des Radikals. Dann findet sich als Algebra XIX folgende Multiplikationstabelle

XIX	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	x_4	0	0
x_2	x_4	x_3	x_4	0
x_3	0	x_4	0	0
x_4	0	0	0	0

Wählen wir nun als neue Basis $y_1 = x_2, y_2 = x_3, y_3 = x_4, y_4 = x_1 - x_3$, so geht die Algebra über in:

	y_1	y_2	y_3	y_4
y_1	y_2	y_3	0	0
y_2	y_3	0	0	0
y_3	0	0	0	0
y_4	0	0	0	0

Und dies ist die Algebra (XX) in Scheffers Tabelle.

Ansonsten ist diese Liste der kommutativen Algebren der Dimension fünf vollständig.

Die Algebren der Dimension sechs wurden von Voghera, Hawkes und Starkweather studiert. Die kommutativen Algebren in dieser Dimension betrachtete Hazlett [24]. In [51] bespricht Voghera die Resultate von Hawkes [21] und Starweather [45]. Die Arbeit von Voghera enthält wohl die genaueste Tabelle der sechsdimensionalen Algebren zu dieser Zeit. Wir möchten seine Resultate bezüglich der nichtlokalen unzerlegbaren Algebren kommentieren. Zwei seiner Algebren (VI 134, VI 136 in seiner Nummerierung) sind nicht assoziativ. Sei nämlich $e_1, \ldots, e_6$ eine Basis der Algebra, so führt er die folgenden beiden Algebren auf.

VI 134	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
e_1	0	0	0	0	0	e_1
e_2	0	0	0	0	e_2	0
e_3	0	e_1	0	e_3	0	0
e_4	e_1	e_2	e_3	e_4	0	0
e_5	0	0	0	0	e_5	0
e_6	0	0	0	0	0	e_6

VI 136	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
e_1	0	0	0	e_1	0	0
e_2	0	0	e_1	0	0	e_2
e_3	0	0	0	e_3	0	0
e_4	e_1	e_2	0	e_4	0	0
e_5	0	0	e_3	0	e_5	0
e_6	0	0	0	0	0	e_6

aber $(e_3 \cdot e_2) \cdot e_6 \neq e_3 (e_2 \cdot e_6)$ in VI 134 und $(e_2 \cdot e_6) e_3 \neq e_2 (e_6 \cdot e_3)$ in VI 136.

Sonst ist seine Liste dieser Algebren aber korrekt. Man sollte dabei beachten, daß er die Multiplikationstabellen von antiisomorphen Algebren nur einmal aufschreibt, und angibt, wann eine Algebra antiisomorph zu sich ist. Insgesamt erhält man 2 unendliche Serien und 64 diskrete Isomorphietypen von nicht lokalen 6-dimensionalen Algebren.

In höheren Dimensionen sind nur noch gewisse Klassen von Algebren behandelt worden. So beschreibt etwa Hawkes in [22] die sieben-dimensionalen nichtlokalen Algebren.

Wir wollen mit einigen ziemlich flüchtigen Bemerkungen über die weitere Entwicklung schließen. Die Theorie verzweigte sich in verschiedene Richtungen. Die allgemeine Strukturtheorie der assoziativen Ringe, die in [53] schon neue Ansätze gegenüber der bislang üblichen Betrachtungsweise zeigt, wurde in den Büchern von Albert, Artin-Nesbitt-Thrall und Jacobson zusammengefaßt, dabei verlagerte sich das Interesse im Falle eines beliebigen Grundkörpers sehr bald auf die endlich-dimensionalen Divisionsringe. Es gibt später nur wenige Artikel, die sich mit der expliziten algebraischen oder geometrischen Klassifikation von Algebren beschäftigen. Dies mag daran liegen, daß es nur eine geringe Hoffnung gibt, dieses Ziel mit rein algebraischen Methoden zu erreichen. Wir wissen nur von zwei Arbeiten, die die Klassifikation weiterverfolgten. Dies ist einmal ein Artikel von Hausdorff [17] und dann insbesondere die Arbeiten von Scorza [41, 42]. Beide interessieren sich für Algebren über speziellen nicht algebraisch abgeschlossenen Körpern und geben Klassifikationen bis zur Dimension fünf. Schon damals scheinen allerdings die älteren Ergebnisse unbekannt gewesen zu sein. So verweist Scorza lediglich auf die eingangs erwähnte Arbeit [47] von Study.

IV. BIBLIOGRAPHIE

Die Literaturangaben umfassen wesentlich mehr Arbeiten aus dem behandelten Zeitabschnitt, als wir ausführlich besprechen konnten. Sie scheint ziemlich vollständig bis zum Jahr 1920 zu sein, wenn wir uns auf jene Arbeiten beschränken, die sich mit expliziten Klassifikationsfragen beschäftigen. Literaturangaben über die spätere Entwicklung findet man etwa in den ausführlichen Bibliographien von Albert [1] und Jacobson [25, 26]. Für die Anfänge verweisen wir auf Scheffers [36] und Study [46].

[1] ALBERT, A. A. *Structure of Algebras.* Coll. Publ. Vol. 24, AMS, Providence 1939.

[2] ALLEN, R. B. On hypercomplex number systems belonging to an arbitrary domain of rationality. *Trans. Am. Math. Soc. 9* (1908), 203-218.

[3] ARTIN, E., C. NESBITT and R. THRALL. *Rings with minimum condition.* Michigan Press 1968.

[4] BOURBAKI, N. *Elemente der Mathematikgeschichte.* Vandenhoeck-Ruprecht, Göttingen 1971.

[5] CARTAN, E. Nombres Complexes. In *Œuvres Complètes*, Gauthier-Villars, Paris 1952, I, 107-246.

[6] —— Sur les systèmes de nombres complexes, *ebenda*, 1-4.

[7] —— Les groupes bilinéaires et les systèmes de nombres complexes, *ebenda*, 7-106.

[8] CAYLEY, A. *Collected Mathematical Papers*, Cambridge University Press.

[9] CLIFFORD, W. K. *Mathematical Papers.* Macmillan, London 1882.

[10] DEDEKIND, R. Zur Theorie der aus *n* Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen. *Göttinger Nachr.* (1884), 141-159.

[11] —— Erläuterungen zur Theorie der sogen. allgemeinen complexen Grössen. *Göttinger Nachr.* (1887), 1-7.