

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 26 (1980)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: KLASIFIKATIONSTHEORIE ENDLICH-DIMENSIONALER ALGEBREN IN DER ZEIT VON 1880 BIS 1920
Autor: Happel, Dieter
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-51060>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 17.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

KLASSIFIKATIONSTHEORIE ENDLICH-DIMENSIONALER ALGEBREN IN DER ZEIT VON 1880 BIS 1920

von Dieter HAPPEL

In diesem Artikel wollen wir einige der unbeachtet gebliebenen Ergebnisse der Klassifikationstheorie endlich-dimensionaler assoziativer Algebren über den komplexen Zahlen \mathbb{C} wieder aufgreifen und Zusammenhänge zu heutigen Fragestellungen aufzeigen. Betrachtet man die Beschreibung des damaligen Standes der nicht-kommutativen Algebra, etwa in der Mathematikgeschichte Bourbaki's [3], so findet sich wenig über die konkreten Resultate. So ist es nicht unser Ziel die Anfänge der allgemeinen Theorie zu analysieren, wie sie sich in ihrer weiterentwickelten Form in den Lehrbüchern findet, sondern vielmehr die Methoden zu beschreiben, wie damals die Algebren kleiner Dimension wirklich klassifiziert wurden.

In der Mitte des neunzehnten Jahrhunderts stellte sich, aufbauend auf den Untersuchungen der komplexen Zahlen durch Gauß, die Frage, ob auch nicht-kommutative Körper existieren. Dies wurde bekanntlich durch Hamilton mit der Entdeckung der Quaternionen positiv beantwortet.

In der Folgezeit wurden immer neue endlich-dimensionale Algebren beschrieben. Zum Beispiel weist Study [47] auf Vorlesungen von Cayley und Weierstrass hin, in denen die zwei-dimensionalen Algebren explizit klassifiziert wurden.

Jedoch war die Beschäftigung mit derartig allgemeinen Strukturen keineswegs unbestritten. So schreibt Study in [47]:

„In weiten Kreisen, namentlich in Deutschland, ist die Ansicht verbreitet, dass die Systeme von komplexen Zahlen oder ähnliche Algorithmen nun überhaupt gar keinen Nutzen hätten, ausgenommen allein die gewöhnlichen komplexen Zahlen; und man begründet dies damit, daß durch sie nichts geleistet werden könnte, was nicht ‚ebenso gut‘ auch ohne sie zu leisten wäre.“

Als Gegenargument gibt er Beispiele für die Bedeutung der Quaternionen in der analytischen Geometrie und zeigt, daß endlich-dimensionale Algebren in natürlicher Weise beim Studium von Transformationsgruppen auftreten.

Für ihn ist die Untersuchung endlich-dimensionaler Algebren keine „spielende und willkürliche Wahl der Gesetze des elementaren Rechnens“, sondern eine neue „Methode der analytischen Geometrie, zu einem ganz bestimmten Zwecke erfunden“, nämlich zur Beschreibung von Systemen von linearen Transformationen auf Vektorräumen, und damit „eine zweckmäßige Methode, die zwar so wenig, als überhaupt irgend eine Methode unumgänglich nothwendig ist, aber doch zur Zeit keineswegs ebenso gut auch entbehrt werden kann... In der Art der Anwendung ist es durchaus vergleichbar mit der Verwertung der Functionen einer complexen Veränderlichen in der Lehre von der conformen Abbildung, worin die complexen Zahlen auch nicht in ihrer Eigenschaft als Erweiterung der reellen Zahlen, sondern als ein analytisch-geometrischer Algorithmus zur Verwendung gelangen... Gerade die Mathematiker, die am eifrigsten gegen die Quaternionen und ähnliche Calculs zu Felde ziehen, machen bei geometrischen Untersuchungen von dem Calcul der gewöhnlichen complexen Zahlen unbedenklich den ausgedehntesten Gebrauch. Sie berufen sich mit Unrecht auf die Autorität von Gauß, um die hier bekämpften Anschauungen zu stützen: Wir besitzen von Gauß ein authentisches Zeugnis, das über seine Stellung zu dieser Frage keinen Zweifel läßt. Warum soll es auch durchaus nicht erlaubt sein, eine abkürzende Bereicherung zu gebrauchen, wenn sie bequem und sachgemäß ist?“ Und Study fügt als Fußnote hinzu: „Ich freue mich, hier Herrn Dedekind zu begegnen, der sich in ähnlichem Sinne über die Quaternionen ausgesprochen hat.“

Die Bibliographie, die wir am Ende des Artikels zusammengestellt haben, zeigt, daß sich trotz dieses Unbehagens sehr viele Mathematiker mit diesem Thema beschäftigt haben.

I. DIE IDEEN VON STUDY

Im Jahre 1890 veröffentlicht Study einen bemerkenswerten Übersichtsartikel [47], der sehr viele Ideen enthält, die die damalige Entwicklung befruchteten, aber auch einiges was nicht weiterverfolgt wurde und erst heute im Wechselspiel zwischen algebraischen und geometrischen Methoden betrachtet wird.

Zunächst wollen wir die Definition einer endlich-dimensionalen assoziativen Algebra mit Eins über den komplexen Zahlen rekapitulieren, wie sie in dieser Arbeit enthalten ist. Dabei wollen wir nicht die ungeheure Vorarbeit von Grassmann [15], Pierce [31] und anderer Mathematiker

vergessen, die die Grundlagen entwickelten. Während des ganzen Abschnitts benutzen wir moderne Terminologie, und fügen in Klammern die damals gebräuchlichen Termini ein.

Sei nun e_1, \dots, e_n eine Basis (n Haupteinheiten) von \mathbf{C}^n . Die Elemente von \mathbf{C}^n (extensive Größen) sind also die möglichen Linearkombinationen mit komplexen Koeffizienten. Das Produkt wird durch folgende Bedingungen definiert [47, p. 283f].

- ,,1. Es muss das Produkt von irgend zweien der extensiven Größen mit denselben Haupteinheiten aufgefaßt werden können. Die nothwendige und hinreichende Bedingung hierfür ist, vermöge des distributiven Gesetzes, das Bestehen von n^2 Relationen der Form

$$(1) \quad e_i e_k = \sum_{s=1}^n \gamma_{iks} e_s$$

worin die Coefficienten γ_{iks} gewöhnliche reelle oder complexe Zahlen vorstellen.

2. Es muss durch irgend drei der extensiven Größen das in der Formel

$$(2) \quad (ab)c = a(bc)$$

ausgesprochene sogenannte associative Gesetz der Multiplikation erfüllt sein.

Die nothwendige und ausreichende Bedingung hierfür ist das Bestehen sämmtlicher Relationen der Form

$$(3) \quad (e_i e_k) e_j = e_i (e_k e_j) \quad (i, j, k = 1, \dots, n)$$

d.h. das Bestehen des folgenden Systems von quadratischen Identitäten für die unter (1) eingeführten Constanten γ_{iks}

$$(4) \quad \sum_{s=1}^n \gamma_{iks} \gamma_{sjt} = \sum_{s=1}^n \gamma_{kjs} \gamma_{ist} \quad (i, k, j, t = 1, \dots, n)$$

3. Es muss unter den extensiven Größen eine Größe e^0 vorhanden sein, die den beiden Gleichungen

$$(5) \quad e^0 x = x, \quad x e^0 = x$$

unabhängig von x genügt.“

Wir sehen, daß sich die Bedingungen (1) bis (5) von der heutigen Definition einer endlich-dimensionalen assoziativen Algebra mit Eins nicht

unterscheiden. Früher wurden diese Systeme auch Systeme von complexen Zahlen oder hypercomplexen Zahlensysteme genannt. Im folgenden verstehen wir unter einer Algebra immer eine, die den Bedingungen (1) bis (5) genügt. Study's weitere Ausführungen enthalten nun den folgenden Satz über die Menge Alg_n aller Algebren einer festen Dimension n .

SATZ: Alg_n ist eine offene Untervarietät einer affinen Varietät.

Sein Beweis: Die Bedingung (4) ist eine abgeschlossene Bedingung auf der Menge der Strukturkonstanten (γ_{iks} ; $i, k, s = 1, \dots, n$). Die Bedingung (5) läßt sich dadurch interpretieren, daß gewisse Determinanten in den Strukturkonstanten nicht verschwinden.

Das zentrale Problem beschreibt Study nun wie folgt [47, p. 288 f].

„Als eine Fundamentalaufgabe in der Theorie der Systeme von complexen Zahlen muss die bezeichnet werden: „Alle Systeme von complexen Zahlen mit n Haupteinheiten zu bestimmen.“

Man kann die Aufgabe nicht etwa so stellen: „Das allgemeinste System von complexen Zahlen in n Haupteinheiten zu finden“; denn es ist nicht von vornherein klar, und, wie die nähere Untersuchung zeigt, auch nicht richtig, daß die Systeme von Constanten γ_{iks} , die den Bedingungen (1), (4), (5) genügen, eine irreducibele Mannigfaltigkeit bilden: Sie zerfallen vielmehr in verschiedene Gebiete, deren allgemeinste Repräsentanten unter sich gleichwertig und als gleich allgemein zu betrachten sind, insofern keines von ihnen aus einem anderen durch einen Grenzübergang erhalten werden kann. Da wir uns aber über die Natur dieser Gebiete in völliger Unkenntnis befinden, so bleibt uns nicht übrig, als bei kleinen Werten der Zahl n zu versuchen, die vorhandenen Systeme unmittelbar zu bestimmen.“

Also wäre nach Study eine der Hauptaufgaben die irreduziblen Komponenten von Alg_n zu bestimmen. Dieses Problem, welches damals nicht gelöst wurde, ist von Gabriel [60] wieder aufgegriffen und mittels algebraisch geometrischer Begriffsbildungen formuliert worden. Dabei betrachten wir die folgende Situation. Auf Alg_n operiert die allgemeine lineare Gruppe durch Basiswechsel. Die Bahnen dieser Operation sind natürlich die Isomorphieklassen. Es gibt zwei verschiedene Möglichkeiten für die irreduziblen Komponenten: entweder sie enthalten eine offene Bahn, oder sie enthalten eine offene Teilmenge, die Vereinigung von unendlich vielen Bahnen gleicher Dimension ist. Die Algebren, die diese Bahnen erzeugen, sind die „allgemeinsten Repräsentanten“ im Sinne von Study.

Die Beschreibung dieser Algebren, aus denen durch Entartung dann alle anderen Algebren entstehen, gehört zu einem wichtigen Problem in der Theorie der endlich-dimensionalen Algebren, welche neben den Anwendungen in der Darstellungstheorie [60] und der algebraischen Geometrie [57] Einblicke in die komplizierte Struktur aller Algebren ermöglicht.

Die Bedeutung der Arbeit Study's lässt sich aber auch an sehr konkreten Beiträgen ablesen, die wir nun besprechen wollen. Er diskutiert die Begriffe Isomorphie und Antiisomorphie (reciproke Algebra) und führt die folgende interessante Invariante ein. Sei A eine n -dimensionale Algebra. Dann ist die Ordnung $\text{ord}(A)$ von A definiert als die größte Zahl i , für die es ein $x \in A$ gibt, so daß $1 = x^0, x, \dots, x^{i-1}$ linear unabhängig sind. Diese Invariante ermöglicht eine grobe Klasseneinteilung der Algebren, welche bei den späteren Klassifikationen (siehe II.) benutzt wurde. Study betrachtete insbesondere die Klasse der Algebren, für die die Ordnung gleich der Dimension ist und formulierte den folgenden Satz:

SATZ: $X = \{ A \in \text{Alg}_n \mid \text{ord}(A) = n \}$ ist eine irreduzible Varietät.

Beweis: Zunächst bemerken wir, daß alle Algebren in X kommutativ sind und daß es eine Bijektion zwischen den Partitionen von n und den Isomorphieklassen von Algebren in X gibt. Falls $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ eine Partition von n ist, so definieren wir $A = \prod_{i=1}^r \mathbf{C}[x]/(x^{\lambda_i})$. Weiter sehen wir, daß die Algebra zur Partition $\lambda = (1, \dots, 1)$, also \mathbf{C}^n mit komponentenweiser Multiplikation nach A_λ entartet. Also ist X irreduzibel.

(Man kann das Entartungsverhalten der Algebren in X mit Hilfe einer geeigneten Anordnung der Partitionen beschreiben [64].)

In dieser Arbeit klassifiziert Study schließlich die Algebren der Dimension vier und fügt die damals schon bekannten Tabellen in den kleineren Dimensionen hinzu. Er vergibt dabei allerdings im Fall $n = 4$ die folgende Algebra:

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ d & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}, a, b, c, d \in \mathbf{C} \right\}$$

Ein zweiter ausführlicher Teil beschäftigt sich detailliert mit Zusammenhängen zur Theorie der Transformationsgruppen, die von Lie eingeführt wurde. Weitere Informationen dazu finden sich in [27].

II. ALLGEMEINE KLASSEKATIONSMETHODEN

Die geometrischen Ideen von Study haben die spätere Entwicklung nicht beeinflußt. Die folgende Zeit war durch ein Wechselspiel zwischen der Entwicklung allgemeiner Struktursätze und Versuchen, die Algebren kleiner Dimension tatsächlich zu klassifizieren, charakterisiert. Das Hauptziel war jedenfalls die Beschreibung einer Normalform für endlichdimensionale Algebren, aus der man dann durch explizite Berechnungen die einzelnen Isomorphietypen ableiten kann. Solche Normalformen wurden etwa in [21], [36] und [27] formuliert. Wir verzichten hier darauf, diese Normalform zu skizzieren: Man würde sie heute unmittelbar aus mittlerweile bekannten Struktursätzen, wie denen von Wedderburn-Malcev und Wedderburn-Molien ableiten, die eben bei der Beschäftigung mit dem Normalformproblem entwickelt wurden. Diese allgemeinen Ergebnisse haben sich ja in den Lehrbüchern tradiert. Wir wollen nun einige Ergebnisse erläutern, die sich im Zusammenhang mit der Klassifikation in kleinen Dimensionen als nützlich erwiesen haben.

Scheffers Beiträge [36] zu der Theorie ermöglichten einige Vereinfachungen im Aufstellen der Algebren einer festen Dimension. Zunächst führte er den noch heute üblichen Zerlegbarkeitsbegriff ein. Da die Klassifikation induktiv durchgeführt wurde, konnte man sich somit auf unzerlegbare Algebren (also Algebren ohne nicht-triviale zentrale Idempotente) beschränken. Er unterteilte die Algebren in Quaternionensysteme und Nichtquaternionensysteme. Quaternionensysteme sind dadurch gekennzeichnet, daß sich die Algebra aller 2×2 -Matrizen über \mathbb{C} als Unteralgebra einbetten läßt. Und er bewies, daß es keine unzerlegbaren Quaternionensysteme der Dimension fünf oder sechs geben kann.

Die Nichtquaternionensysteme mit mehreren orthogonalen Idempotenten bereiten naturgemäß keine großen Schwierigkeiten. Somit lag also die Hauptschwierigkeit bei der Klassifikation der lokalen Algebren. Es gab einige Ansätze [44], [45], um lokale Algebren allgemein zu klassifizieren. Aber dies führt zu Resultaten, die keinen Hinweis enthalten, ob die damit verbundenen Rechnungen in höheren Dimensionen überhaupt durchführbar sind.

Bei der Klassifikation der lokalen Algebren wurde eine schon erwähnte Idee von Study aufgegriffen. Man unterteilte diese Algebren nach ihrer Ordnung und konnte für gewisse Extremwerte eine vollständige Klassifikation durchführen. Wir wollen dies an einem Beispiel vorführen. Sei A

eine lokale Algebra der Dimension n ($n > 4$) und $\text{ord}(A) = n - 1$. Es gibt also x, y im Radikal von A , so daß $x, x^2, \dots, x^{n-2}, y$ eine Basis bilden. Man sieht leicht, daß wir annehmen können: $xy = 0, yx = ax^{n-2}, y^2 = bx^{n-2}$ mit $a, b \in \mathbb{C}$. Und die Voraussetzung $n > 4$ erlaubt nun, die Parameter a, b wie folgt zu wählen:

(a, b)	A
$(0, 0)$	$k[x, y] / (x^{n-1}, y^2, xy)$
$(0, 1)$	$k[x, y] / (x^{n-2} - y^2, xy)$
$(1, 0)$	$k\langle x, y \rangle / (x^{n-2} - yx, y^2, xy)$
$(1, 1)$	$k\langle x, y \rangle / (x^{n-2} - y^2, xy, yx - y^2)$

(wobei $k\langle x, y \rangle$ die freie Algebra in zwei Erzeugenden bezeichnet)
 Diese Ergebnisse sind in [27], [36] enthalten. Eine weitere Möglichkeit zur Untersuchung der lokalen Algebren liefert der Begriff des Geschlechts einer lokalen Algebra. Dies ist die Zahlenfolge $(\dim J^i/J^{i+1})_i, i = 0, 1, 2, \dots$, mit $J = \text{rad } A$. Diese Unterteilung in grobe Klassen (nach Ordnung und Geschlecht) kann man sehr gut in der Arbeit von Voghera [51] erkennen.

Wir wollen abschließend festhalten, daß in schwierigen Fällen (z.B. $\text{ord}(A) = 3$) umfangreiche Rechnungen erforderlich waren, um diese grobe Einteilung so zu verfeinern, daß man die einzelnen Isomorphietypen erhält. Da in höheren Dimensionen, nämlich für $n \geq 4$, die Klassifikation nicht mehr endlich ist, ergab sich zusätzlich das Problem, einen minimalen Parameterbereich für die unendlichen Serien anzugeben. Dieses Problem wurde in einigen Fällen auch gelöst.

So enthält die Arbeit von Study [47] folgende Multiplikationstabelle einer Serie vierdimensionaler lokaler Algebren. Dabei bezeichne e_0, e_1, e_2, e_3 eine Basis der Algebra.

	e_0	e_1	e_2	e_3
e_0	e_0	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	e_3	e_3	0
e_2	e_2	$-e_3$	ce_3	0
e_3	e_3	0	0	0

Der minimale Parameterbereich für c ist die projektive Gerade über \mathbb{C} .

Genauere Untersuchungen zur geometrischen Struktur solcher Parameterbereiche wurden jedoch damals nicht angestellt.

III. SPEZIELLE ERGEBNISSE IN KLEINEN DIMENSIONEN

Das Hauptinteresse in dieser Periode lag ganz offensichtlich in der expliziten Berechnung der Isomorphieklassen der Algebren einer festen Dimension, nicht jedoch in einer allgemeinen Strukturtheorie. Dabei wurde, wie im letzten Abschnitt erwähnt, immer eine der verschiedenen typischen Normalformen zugrundegelegt, mittels Invarianten, wie Ordnung und Geschlecht, eine grobe Klasseneinteilung vorgenommen und diese genauer untersucht. Leider sind jedoch die meisten der Tabellen nicht korrekt: entweder sie sind nicht vollständig oder sie enthalten auch nicht-assoziative Algebren, oder schließlich sind einige der aufgeführten Algebren isomorph. Wir wollen auf einige der Fehler hinweisen, nicht aber die Randbemerkung von Scheffers in [35] vergessen.

„Die nachfolgenden der Systeme sind mit aller bei so umfangreicher Rechnung erforderlichen Sorgfalt bestimmt und von den überzähligen gesäubert worden. Sollten sich doch noch Fehler finden, was der Verfasser nicht vermutet, so bittet derselbe um Nachsicht.“ Die Klassifikation der Algebren bis zur Dimension vier ist in [47] enthalten. Wir hatten schon erwähnt, daß Study eine Algebra in der Dimension vier ausgelassen hatte, die Tabellen der Algebren kleinerer Dimensionen sind dagegen vollständig. Im Jahre 1890 bearbeiteten Scheffers [35] und unabhängig davon Rohr [33] den Fall der fünf-dimensionalen Algebren. Wir wollen kurz auf die Scheffersche Klassifikation der kommutativen Algebren eingehen. Es gibt genau zwanzig Isomorphieklassen von kommutativen Algebren. Scheffers erhält 21 und tatsächlich sind die folgenden zwei lokalen Algebren isomorph. Sei x_1, \dots, x_4 eine Basis des Radikals. Dann findet sich als Algebra XIX folgende Multiplikationstabelle

<i>XIX</i>	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	x_4	0	0
x_2	x_4	x_3	x_4	0
x_3	0	x_4	0	0
x_4	0	0	0	0

Wählen wir nun als neue Basis $y_1 = x_2, y_2 = x_3, y_3 = x_4, y_4 = x_1 - x_3$, so geht die Algebra über in:

	y_1	y_2	y_3	y_4
y_1	y_2	y_3	0	0
y_2	y_3	0	0	0
y_3	0	0	0	0
y_4	0	0	0	0

Und dies ist die Algebra (XX) in Scheffers Tabelle.

Ansonsten ist diese Liste der kommutativen Algebren der Dimension fünf vollständig.

Die Algebren der Dimension sechs wurden von Voghera, Hawkes und Starkweather studiert. Die kommutativen Algebren in dieser Dimension betrachtete Hazlett [24]. In [51] bespricht Voghera die Resultate von Hawkes [21] und Starweather [45]. Die Arbeit von Voghera enthält wohl die genaueste Tabelle der sechsdimensionalen Algebren zu dieser Zeit. Wir möchten seine Resultate bezüglich der nichtlokalen unzerlegbaren Algebren kommentieren. Zwei seiner Algebren (VI 134, VI 136 in seiner Nummerierung) sind nicht assoziativ. Sei nämlich e_1, \dots, e_6 eine Basis der Algebra, so führt er die folgenden beiden Algebren auf.

$VI\ 134$	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	$VI\ 136$	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
e_1	0	0	0	0	0	e_1	e_1	0	0	0	e_1	0	0
e_2	0	0	0	0	e_2	0	e_2	0	0	e_1	0	0	e_2
e_3	0	e_1	0	e_3	0	0	e_3	0	0	0	e_3	0	0
e_4	e_1	e_2	e_3	e_4	0	0	e_4	e_1	e_2	0	e_4	0	0
e_5	0	0	0	0	e_5	0	e_5	0	0	e_3	0	e_5	0
e_6	0	0	0	0	0	e_6	e_6	0	0	0	0	0	e_6

aber $(e_3 \cdot e_2) \cdot e_6 \neq e_3 (e_2 \cdot e_6)$ in VI 134 und $(e_2 \cdot e_6) e_3 \neq e_2 (e_6 \cdot e_3)$ in VI 136.

Sonst ist seine Liste dieser Algebren aber korrekt. Man sollte dabei beachten, daß er die Multiplikationstabellen von antiisomorphen Algebren nur einmal aufschreibt, und angibt, wann eine Algebra antiisomorph zu sich ist. Insgesamt erhält man 2 unendliche Serien und 64 diskrete Isomorphietypen von nicht lokalen 6-dimensionalen Algebren.

In höheren Dimensionen sind nur noch gewisse Klassen von Algebren behandelt worden. So beschreibt etwa Hawkes in [22] die sieben-dimensionalen nichtlokalen Algebren.

Wir wollen mit einigen ziemlich flüchtigen Bemerkungen über die weitere Entwicklung schließen. Die Theorie verzweigte sich in verschiedene Richtungen. Die allgemeine Strukturtheorie der assoziativen Ringe, die in [53] schon neue Ansätze gegenüber der bislang üblichen Betrachtungsweise zeigt, wurde in den Büchern von Albert, Artin-Nesbitt-Thrall und Jacobson zusammengefaßt, dabei verlagerte sich das Interesse im Falle eines beliebigen Grundkörpers sehr bald auf die endlich-dimensionalen Divisionsringe. Es gibt später nur wenige Artikel, die sich mit der expliziten algebraischen oder geometrischen Klassifikation von Algebren beschäftigen. Dies mag daran liegen, daß es nur eine geringe Hoffnung gibt, dieses Ziel mit rein algebraischen Methoden zu erreichen. Wir wissen nur von zwei Arbeiten, die die Klassifikation weiterverfolgten. Dies ist einmal ein Artikel von Hausdorff [17] und dann insbesondere die Arbeiten von Scorza [41, 42]. Beide interessieren sich für Algebren über speziellen nicht algebraisch abgeschlossenen Körpern und geben Klassifikationen bis zur Dimension fünf. Schon damals scheinen allerdings die älteren Ergebnisse unbekannt gewesen zu sein. So verweist Scorza lediglich auf die eingangs erwähnte Arbeit [47] von Study.

IV. BIBLIOGRAPHIE

Die Literaturangaben umfassen wesentlich mehr Arbeiten aus dem behandelten Zeitabschnitt, als wir ausführlich besprechen konnten. Sie scheint ziemlich vollständig bis zum Jahr 1920 zu sein, wenn wir uns auf jene Arbeiten beschränken, die sich mit expliziten Klassifikationsfragen beschäftigen. Literaturangaben über die spätere Entwicklung findet man etwa in den ausführlichen Bibliographien von Albert [1] und Jacobson [25, 26]. Für die Anfänge verweisen wir auf Scheffers [36] und Study [46].

- [1] ALBERT, A. A. *Structure of Algebras*. Coll. Publ. Vol. 24, AMS, Providence 1939.
- [2] ALLEN, R. B. On hypercomplex number systems belonging to an arbitrary domain of rationality. *Trans. Am. Math. Soc.* 9 (1908), 203-218.
- [3] ARTIN, E., C. NESBITT and R. THRALL. *Rings with minimum condition*. Michigan Press 1968.
- [4] BOURBAKI, N. *Elemente der Mathematikgeschichte*. Vandenhoeck-Ruprecht, Göttingen 1971.
- [5] CARTAN, E. Nombres Complexes. In *Oeuvres Complètes*, Gauthier-Villars, Paris 1952, I, 107-246.
- [6] — Sur les systèmes de nombres complexes, *ebenda*, 1-4.
- [7] — Les groupes bilinéaires et les systèmes de nombres complexes, *ebenda*, 7-106.
- [8] CAYLEY, A. *Collected Mathematical Papers*, Cambridge University Press.
- [9] CLIFFORD, W. K. *Mathematical Papers*. Macmillan, London 1882.
- [10] DEDEKIND, R. Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Größen. *Göttinger Nachr.* (1884), 141-159.
- [11] — Erläuterungen zur Theorie der sogen. allgemeinen complexen Größen. *Göttinger Nachr.* (1887), 1-7.

- [12] DICKSON, L. E. On hypercomplex number systems. *Trans. Am. Math. Soc.* 6 (1905), 344-348.
- [13] FROBENIUS, F. G. Theorie der hyperkomplexen Größen I, II. *Gesammelte Werke*, Springer, Berlin, 1968.
- [14] GHENT, K. S. A note on nilpotent algebras in four units. *Bull. of the Am. Math. Soc.* 40 (1934), 331-338.
- [15] GRASSMANN, H. *Die Ausdehnungslehre von 1844*. Chelsea, New York. 1969.
- [16] HAMILTON, W. R. *Lectures on Quaternions*. Dublin 1853.
- [17] HAUSDORFF, F. Ringe mit vier linear unabhängigen singulären Elementen (über dem Körper $K = \mathbf{F}_q$). *Gesammelte Werke*, Teubner, Stuttgart 1969, 73-84.
- [18] HAWKES, H. E. On hypercomplex number system. *Trans. Am. Math. Soc.* 3 (1902), 312-330.
- [19] —— Estimate of Pierce's Linear Associative Algebra. *Am. Jour. Math.* 24 (1902), 87-95.
- [20] —— On Quaternion Number Systems. *Math. Ann.* 60 (1905), 437-447.
- [21] —— Enumeration of Non-Quaternion Number Systems. *Math. Ann.* 58 (1904), 361-379.
- [22] —— On Hypercomplex Number Systems in seven units. *Am. Jour. Math.* 26 (1904), 223-242.
- [23] HAZLETT, O. C. Invariantive Characterization of some linear associative algebras. *Ann. Math.* 16 (1914), 1-6.
- [24] —— On the classification and invariantive characterization of nilpotent algebras. *Am. Jour. Math.* 38 (1916), 109-138.
- [25] JACOBSON, N. *The Theory of Rings*. Math. Surveys Number II, AMS, Providence 1943.
- [26] —— *Structure of Rings*. Coll. Publ. Vol. 37, AMS, Providence 1956.
- [27] LIE, S. *Vorlesungen über continuierliche Gruppen*. Chelsea, New York 1971.
- [28] MOLIEN, Th. Über Systeme höherer complexer Zahlen. *Math. Ann.* 41 (1893), 83-156.
- [29] —— Berichtigung zu dem Aufsatz „Über Systeme höherer complexer Zahlen“. *Math. Ann.* 42 (1893), 308-312.
- [30] PICKERT, G. Neue Methoden in der Strukturtheorie der kommutativ-assoziativen Algebren. *Math. Ann.* 116 (1939), 217-280.
- [31] PIERCE, B. Linear Associative Algebra. *Am. Jour. Math.* 4 (1881), 97-229.
- [32] POINCARÉ, H. Sur les nombres complexes. *Comptes Rendus XCIX* (1884), 740-742.
- [33] ROHR, H. *Über die aus fünf Haupteinheiten ableitbaren höheren complexen Zahlen*. Dissertation Marburg, 1890.
- [34] SCHEFFERS, G. Zur Theorie der aus n Haupteinheiten ableitbaren höheren complexen Zahlen. *Ber. der Ges. der Wiss. zu Leipzig* (1889), 290-307.
- [35] —— Über die Berechnung von Zahlensystemen, ebenda, 400-457.
- [36] —— Zurückführung complexer Zahlensysteme auf typische Formen. *Math. Ann.* 39 (1891), 293-390.
- [37] —— Über die Reduzibilität complexer Zahlensysteme. *Math. Ann.* 41 (1893), 601-604.
- [38] SCHOUTEN, J. A. Zur Klassifizierung der assoziativen Zahlensysteme. *Math. Ann.* 76 (1915), 1-66.
- [39] —— Zur Klassifizierung der assoziativen Zahlensysteme. *Math. Ann.* 78 (1918), 218-220. Und Zusatz in *Math. Ann.* 77 (1916), 307.
- [40] SCHUR, F. Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Zahlen. *Math. Ann.* 33 (1889), 49-60.
- [41] SCORZA, G. Le Algebre Del 3º Ordine. *Società Reale di Napoli, Serie Seconda* 20 (13) (1934), 1-14.

- [42] SCORZA, G. Le Algebre Del 4^o Ordine. *Società Reale di Napoli, Serie Seconda* 20 (14) (1934), 1-83.
- [43] —— *Opere Scelte Vol. I-III*. Edizione Cremonese, Roma 1960-62.
- [44] STARKWEATHER, G. P. Non Quaternion Number Systems containing no skew units. *Am. Jour. Math.* 21 (1899), 369-386.
- [45] —— A class of number systems in six units. *Am. Jour. Math.* 23 (1901), 378-402.
- [46] STUDY, E. Theorie der Gemeinen und Höheren complexen Größen. *Encyclopädie der Math. Wiss. I: 1*, 147-183.
- [47] —— Über Systeme complexer Zahlen und ihre Anwendung in der Theorie der Transformationsgruppen. *Monatsh. für Math. u. Phys.* (1890), 283-355.
- [48] —— Über Systeme von complexen Zahlen. *Göttinger Nachr.* (1889), 237-268.
- [49] —— Complexe Zahlen und Transformationsgruppen. *Ber. der Ges. der Wiss. zu Leipzig* (1889), 177-228.
- [50] TABER, H. On hypercomplex number systems. *Trans. Am. Math. Soc.* 5 (1904), 509-548.
- [51] VOGHERA, G. Zusammenstellung der irreduziblen complexen Zahlensysteme in sechs Einheiten. *Denkschr. der math.-naturwiss. Klasse der K. Akademie der Wiss. zu Wien* 84 (1908), 269-328.
- [52] —— Ein direkter Beweis für die Normalform der komplexen Zahlensysteme. *Math. Ann.* 77 (1916), 563-572.
- [53] WEDDERBURN, J. H. M. On hypercomplex numbers. *Proc. London Math. Soc.* 2, Serie 6 (1908), 77-118.
- [54] WEIERSTRASS, K. Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Größen. *Göttinger Nachr.* (1884), 395-419.

Die folgende Auswahl, die bei weitem nicht vollständig ist, enthält einige neuere Arbeiten aus diesem Gebiet, deren Bibliographien weitere Arbeiten zu entnehmen sind.

- [55] BRIANCON, J. Description de Hilb{ C } x, y^n . *Invent. Math.* 41 (1977), 45-89.
- [56] DONALD, J. D. and F. J. FLANIGAN. Deformations of Algebra Modules. *Journal of Alg.* 31 (1974), 245-256.
- [57] ENSALEM, J. et A. IARROBINO. Réseaux de coniques et algèbres de longueur 7 associées. (*Erscheint demnächst*).
- [58] FLANIGAN, J. J. Which algebras deform into a total matrix algebra. *Journal of Alg.* 29 (1974), 103-112.
- [59] —— Algebraic geography: Varieties of structure constants. *Pacific J. of Math.* 23 (1968), 71-79.
- [60] GABRIEL, P. Finite Representation type is open. *Representations of Algebras, Springer Lecture Notes* 488, 1974.
- [61] HAPPEL, D. Deformations of five dimensional algebras with unit. (*Erscheint demnächst*).
- [62] IARROBINO, A. Punctual Hilbert Schemes. *Memoirs Amer. Math. Soc.* 188 (1977).
- [63] MAZZOLA, G. The algebraic and geometric classification of associative algebras of dimension five. *Manuscripta Math.* 27 (1979), 81-101.
- [64] —— Some criteria for deformation of finite dimensional algebras and the Hasse-diagram of commutative algebras of dimension five. (*Erscheint demnächst*).

(Reçu le 6 février 1979)

Dieter Happel

Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld
D 48 Bielefeld
BR Deutschland