Quad (N)) la sous-catégorie formée des modules bilinéaires symétriques (M, φ, N) (resp. antisymétriques, alternés, quadratiques) non dégénérés dont le module sous-jacent M est projectif de type fini. Le formalisme de la K-théorie algébrique ([1], Ch. 1) est adapté à ces situations. Ainsi à l'aide de la somme orthogonale on obtient des groupes abéliens qu'on note $K_0^{\mathrm{Symbil}}(N)$, $K_0^{\mathrm{As}}(N)$, $K_0^{\mathrm{Alt}}(N)$ $K_0^{Q}(N)$: ce sont les groupes universels (ou de Groethendieck) pour les applications f de l'ensemble des classes d'isomorphisme d'objets de la catégorie correspondante dans les groupes abéliens G tels que $f(M \perp M') = f(M) + f(M')$ dans G.

Soit alors $K_0(R)$ le groupe de Groethendieck de la catégorie $\underline{P}(R)$ des R-modules projectifs de type fini et notons $[M]$ la classe dans ce groupe du module M. L'application f qui au module bilinéaire M associe $[M]$ (foncteur oubli) induit d'après le caractère universel des groupes définis ci-dessus des homomorphismes de groupes abéliens $K_0^{\cdot}(F) : K_0^{\cdot}(N) \to K_0(R)$ (le point . remplaçant Symbil, As, Alt ou Q). Inversement, l'isomorphisme naturel $h(P_1, N) \perp h(P_2, N) \cong h(P_1 \oplus P_2, N)$ pour P_1 et P_2 dans $\underline{P}(R)$ induit des homomorphismes $K_0^{\cdot}(H) : K_0(R) \to K_0^{\cdot}(N)$. Dans le cas quadratique, on appelle groupe de Witt *des types de formes quadratiques* de N, le conoyau de $K_0^{Q}(H)$.

Dans les autres cas, on peut définir deux groupes de Witt selon que l'on considère comme triviaux les modules hyperboliques ou plus généralement les modules métaboliques. Mais, en fait, les deux groupes obtenus sont canoniquement isomorphes.

Ces groupes de Groethendieck et de Witt commutent à l'extension des scalaires du fait de la propriété analogue de la somme orthogonale. Il en est de même pour les homomorphismes $K_0^{\cdot}(F)$ et $K_0^{\cdot}(H)$.

Fixons la notation suivante: si (M, φ, N) (resp. (M, q, N)) est un module bilinéaire (resp. quadratique), on notera $[(M, \varphi)]$ ou $[\varphi]$ (resp. $[(M, q)]$ ou $[q]$) son image dans $K_0^{\cdot}(N)$. On abrègera K_0^{Symbil} en K_0^{SB}.

2. Structures multiplicatives

Le groupe de Groethendieck $K_0(R)$ est muni d'une structure d'anneau (commutatif et unitaire) par le produit tensoriel. Nous allons voir que pour les modules bilinéaires et quadratiques nous avons une situation analogue qui enrichit les groupes $K_0^{\cdot}(N)$ de structures supplémentaires.

2.1. *Produit tensoriel de modules bilinéaires*

Soient (M, φ, N) et (M', φ', N') deux modules bilinéaires respectivement ε et ε'-symétriques. L'application $u : M \times M' \times M \times M'$ dans $N \otimes N'$ définie par $u(x, y, x', y') = \varphi(x, y) \otimes \varphi'(x', y')$ est linéaire par rapport à chaque argument et induit une application bilinéaire sur le R-module $M \otimes M'$ à valeurs dans $N \otimes N'$ qui est $\varepsilon\varepsilon'$-symétrique. Ce nouveau module bilinéaire noté $(M \otimes M', \varphi \otimes \varphi', N \otimes N')$ est appelé produit tensoriel de (M, φ, N) et (M', φ', N'); ce produit est manifestement commutatif et associatif à isomorphisme près; il est aussi, comme le produit tensoriel de modules vis-à-vis de la somme directe, distributif vis-à-vis de la somme orthogonale de modules bilinéaires.

Si $\varepsilon\varepsilon' = -1$, l'un des deux modules est antisymétrique, par exemple (M, φ). Supposons-le alterné; alors $(M \otimes M', \varphi \otimes \varphi')$ est alterné: en effet il est clair que $\varphi \otimes \varphi'$ est nul sur les couples $(x_i \otimes x_i', x_i \otimes x_i')$ où $x_i \in M$, $x_i' \in M'$. Comme $\varphi \otimes \varphi'$ est antisymétrique, on en déduit que $\varphi \otimes \varphi'(z, z) = 0$ pour tout $z = \sum_i x_i \otimes x_i'$ de $M \otimes M'$.

2.2. *Cas d'un module quadratique et d'un module bilinéaire*

Supposons maintenant donnés un module quadratique (M, q, N) et un module bilinéaire *symétrique* (M', φ', N'). On a alors la

PROPOSITION 2.2.1. *Il existe un module quadratique unique* $(M \otimes M', \bar{q} = q \otimes \varphi', N \otimes N')$ *vérifiant les deux conditions suivantes :*

(i) $\bar{q}(x \otimes x') = q(x) \otimes \varphi'(x', x')$

(ii) $\varphi\bar{q} \cong \varphi_q \otimes \varphi'$.

La proposition est due à C. H. Sah ([8], [9]). L'unicité est claire car (i) et (ii) définissent $\bar{q} = q \otimes \varphi'$ sur toute somme $z = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes x_i'$ comme

$$\bar{q}(z) = \sum_{i=1}^{n} q \otimes \varphi'(x_i \otimes x_i') + \sum_{1 \leqq i < j \leqq n} \varphi_q \otimes \varphi'(x_i \otimes x_i', x_j \otimes x_j').$$

L'existence se montre aisément si M et M' sont libres et, dans le cas général, on présente M et M' comme quotients de modules libres.

Si maintenant (M, q, N) et (M', q', N') sont deux modules quadratiques, on peut définir sur $M \otimes M'$ deux applications quadratiques à valeurs dans $N \otimes N'$ à l'aide de $(q, \varphi_{q'})$ d'une part, (φ_q, q') d'autre part. On a alors $\varphi_{q \otimes \varphi_{q'}} = \varphi_q \otimes \varphi_{q'} = \varphi_{\varphi_q \otimes q'}$ et pour tout couple (x, x')

de $M \times M'$, $q \otimes \varphi_{q'}$ $(x \otimes x') = q(x) \otimes \varphi_{q'}$ $(x', x') = 2q(x) \otimes q'(x')$ $= \varphi_q(x, x) \otimes q'(x') = \varphi_q \otimes q'(x \otimes x')$, si bien que les deux *modules quadratiques coïncident.*

Les propriétés signalées en 2.1 (associativité, commutativité et distributivité par rapport à la somme orthogonale) sont encore valables. On peut encore noter que le produit tensoriel commute à l'extension des scalaires.

Supposons maintenant les modules N et N' dans $\underline{\mathrm{Pic}}\,(R)$; on a alors la

PROPOSITION 2.2.2. *Le produit tensoriel de deux modules bilinéaires ε_i-symétriques non dégénérés* (resp. *d'un module quadratique et d'un module bilinéaire symétrique non dégénérés*) *est un module bilinéaire* (resp. *quadratique*) *non dégénéré.*

En effet, si $s_\varphi : M \to \mathrm{Hom}\,(M, N)$ et $s_{\varphi'} : M' \to \mathrm{Hom}\,(M', N')$ sont des isomorphismes de R-modules, alors $s_{\varphi \otimes \varphi'}$, qui s'obtient en composant $s_\varphi \otimes s_{\varphi'} : M \otimes M' \to \mathrm{Hom}\,(M, N) \otimes \mathrm{Hom}\,(M', N')$ avec l'isomorphisme naturel entre ce dernier module et $\mathrm{Hom}\,(M \otimes M', N \otimes N')$ est un isomorphisme.

2.3. *Structures d'anneaux et de modules*

La proposition 2.2.2 et les résultats de 2.1 montrent que le produit tensoriel induit sur $K_0^{SB}(R)$ une structure d'anneau commutatif: comme tout élément de ce groupe est différence d'éléments $[\varphi]$, il suffit de définir $[\varphi_1] \times [\varphi_2] = [\varphi_1 \otimes \varphi_2]$. Cet anneau est unitaire d'élément unité $\langle 1 \rangle$: $R \times R \to R$ défini par $\langle 1 \rangle (r, s) = rs$.

Comme le produit tensoriel d'une forme symétrique (resp. antisymétrique, alternée, quadratique) à valeurs dans $N \in \underline{\mathrm{Pic}}\,(R)$ par une forme symétrique à valeurs dans R est une forme de même nature que la première et à valeurs dans N, les propriétés d'associativité et de distributivité vues en 2.1 et 2.2 montrent que les groupes $K_0^{\cdot}(N)$ sont de façon naturelle des $K_0^{SB}(R)$-modules unitaires.

De plus le produit tensoriel induit, pour N et N' dans $\underline{\mathrm{Pic}}\,(R)$, une application naturelle de $K_0^{SB}(N) \times K_0^{SB}(N')$ dans $K_0^{SB}(N \otimes N')$ qui est biadditive et $K_0^{SB}(R)$-linéaire par rapport à chaque variable. On obtient ainsi un homomorphisme naturel ${}_N\otimes_{N'} : K_0^{SB}(N) \otimes_{K_0^{SB}(R)} K_0^{SB}(N')$ $\to K_0^{SB}(N \otimes N')$. On peut énoncer des résultats analogues pour les autres groupes $K_0^{\cdot}(N)$ qui sont des $K_0^{SB}(R)$-modules. Retenons les deux cas particuliers suivants:

Si φ et φ' sont deux formes alternées à valeurs scalaires, $\varphi \otimes \varphi'$ est une forme symétrique. On a ici une *application*

$$K_0^{SB}(R)\text{-}\textit{bilinéaire symétrique de } K_0^{\mathrm{Alt}}(R) \times K_0^{\mathrm{Alt}}(R) \text{ dans } K_0^{SB}(R).$$

Dans le cas quadratique, l'application $q \to \varphi_q$ induit une application $K_0^{SB}(R)$-linéaire de $K_0^Q(N)$ dans $K_0^{SB}(N)$ qu'on notera b_N (bilinéarisée). Si N et N' sont dans $\underline{\mathrm{Pic}}(R)$, on a d'après 2.2 les formules suivantes dans $K_0^Q(N \otimes N')$ et $K_0^{SB}(N \otimes N')$:

$$(1)\ q \otimes q' = b_N(q) \otimes q' = q \otimes b_{N'}(q')$$

$$(2)\ b_N(q \otimes q') = b_N(q) \otimes b_N(q').$$

2.4. *Remarques*

(i) On peut encore définir un autre anneau commutatif et unitaire associé aux modules bilinéaires symétriques : à savoir $\overline{K_0^{SB}(R)} = \bigoplus_{N \in \underline{\mathrm{Pic}}(R)} K_0^{SB}(N)$, le produit étant défini à l'aide des applications ${}_N\otimes_{N'}$ de 2.3. C'est une $K_0^{SB}(R)$-algèbre commutative graduée par le groupe $\underline{\mathrm{Pic}}(R)$. Les sommes directes $\overline{K_0^{\cdot}(R)} = \bigoplus_{N \in \underline{\mathrm{Pic}}(R)} K_0^{\cdot}(N)$ où . désigne As, Alt ou Q sont des $\overline{K_0^{SB}(R)}$-modules gradués sur $\underline{\mathrm{Pic}}(R)$.

(ii) Si $N \in \underline{\mathrm{Pic}}(R)$, $N \otimes N^*$ s'identifie canoniquement à R d'où un homomorphisme naturel $K_0^{SB}(N) \otimes_{K_0^{SB}(R)} K_0^{SB}(N^*) \to K_0^{SB}(R)$. On a aussi un isomorphisme naturel entre $K_0^{SB}(R)$ et $K_0^{SB}(N \otimes N)$ par $(M, \varphi, R) \to (M \otimes N, \varphi \otimes 1_{N \otimes N}, N \otimes N)$.

(iii) Si 2 est inversible dans R, b_N est un isomorphisme de $K_0^{SB}(R)$-modules; la structure d'anneau de $K_0^{SB}(R)$ se transporte à $K_0^Q(R)$. Dans le cas général, la structure multiplicative de $K_0^Q(R)$ ne présente d'intérêt que du fait des relations (1) et (2) de 2.3.

(iv) En ce qui concerne le foncteur oubli, $K_0(F) : K_0^{SB}(R) \to K_0(R)$ est un homomorphisme d'anneaux. Tout ce qui a été vu en 2.2, 2.3 et 2.4 se comporte bien par extension des scalaires.

(v) Le produit tensoriel d'un espace hyperbolique par un autre module (symétrique, quadratique ou alterné) est un espace hyperbolique, ce qui montre que le sous-groupe engendré par les espaces hyperboliques est un idéal (ou un sous $K_0^{SB}(R)$-module suivant les cas).

2.5. *Formes alternées et formes quadratiques*

Les deux remarques de 2.3 nous conduisent aux définitions suivantes: $L_{\mathrm{Alt}}(R)$ et $L_Q(R)$ sont deux anneaux commutatifs $Z/(2)$-gradués dont les composantes homogènes de degré 0 sont $K_0^{SB}(R)$ pour chacun d'eux et les composantes de degré 1 respectivement $L_{\mathrm{Alt}}(R)_1 = K_0^{\mathrm{Alt}}(R)$ et $L_Q(R)_1 = K_0^Q(R)$. Le produit dans $L_{\mathrm{Alt}}(R)$ est défini à l'aide de l'application de $K_0^{\mathrm{Alt}}(R) \times K_0^{\mathrm{Alt}}(R)$ dans $K_0^{SB}(R)$ vue en 2.3. Celui de $L_Q(R)$ est défini par la formule:

$$(b, q)(b', q') = (bb' + \varphi_q \cdot \varphi_{q'}, b \cdot q' + b' \cdot q) \, .$$

L'intérêt de ces deux anneaux est qu'ils sont le cadre naturel des opérations λ et σ sur les formes bilinéaires symétriques, alternées et quadratiques que nous verrons en 3.

Si 2 est inversible dans R, la bilinéarisation est un isomorphisme de K_0^Q sur K_0^{SB} et $L_Q = K_0^{SB}(R)[x]$ avec $x^2 = 1$. Les anneaux L_{Alt} et L_Q jouissent des propriétés fonctorielles usuelles vis-à-vis de l'extension des scalaires.

3. Puissances extérieures et puissances symétriques

Les puissances extérieures sont un outil important de l'algèbre linéaire. Nous souhaitons montrer ici que dans le cadre des modules bilinéaires ou quadratiques des constructions semblables peuvent être faites. Cela permettra de munir les anneaux rencontrés dans la partie précédente d'opérations λ et σ.

3.1. *Puissances extérieures de modules bilinéaires*

Soit (M, φ, N) un R-module bilinéaire; si $N = A$, la définition des puissances extérieures de φ est bien connue ([3], [8]). Dans le cas général, définissons l'application de $M \times M \times \ldots \times M$, $2p$ fois, dans l'algèbre symétrique $S(N)$ du R-module N qui à $(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_p)$ associe le déterminant de la matrice des $\varphi(x_i, y_j)$, $\varphi(x_i, y_j) \in N = S^1(N)$, sous R-module de $S(N)$. C'est une application multilinéaire par rapport aux x_i et y_j et alternée vis-à-vis des x_i d'un côté et des y_j de l'autre. On obtient ainsi un module bilinéaire $(\Lambda^p M, \Lambda^p \varphi, S^p N)$, la puissance extérieure $p^{\text{ième}}$ de (M, φ, N). Si φ est ε-symétrique, $\Lambda^p \varphi$ est ε^p-symétrique. Si φ est non