

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 26 (1980)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: OPÉRATIONS SUR LES MODULES BILINÉAIRES
Autor: Revoy, Philippe
Kapitel: 1. GÉNÉRALITÉS
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-51059>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 01.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

1. GÉNÉRALITÉS

1.1. Définitions

1) Un module *bilinéaire ε -symétrique* est un triple (M, φ, N) où M et N sont des R -modules et φ une application bilinéaire de $M \times M$ dans N telle que $\varphi(y, x) = \varepsilon \varphi(x, y)$, quels que soient x et y dans M . Si $\varepsilon = +1$, φ est symétrique; sinon φ est antisymétrique.

2) Un module *alterné* est un triple (M, φ, N) où $\varphi : M \times M \rightarrow N$ est bilinéaire et vérifie $\varphi(x, x) = 0$ pour tout x de M .

3) Un module *quadratique* est un triple (M, q, N) où q est une application de M dans N vérifiant:

- (i) $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$ pour tout couple (x, λ) de $M \times R$;
- (ii) $(x, y) \rightarrow q(x+y) - q(x) - q(y)$ est une application bilinéaire (symétrique) qu'on note φ_q de $M \times M$ dans N .

1.2. Remarques

(1) Les objets (M, φ, N) (resp. (M, q, N)) définis en 1.1 seront aussi notés (M, φ) ou φ (resp. (M, q) ou q) suivant le contexte et appelés applications bilinéaires (resp. quadratiques). Si M et N sont fixés, les applications φ (ou q) forment un R -module pour la somme des applications et la multiplication par un scalaire. Si $N = R$, ou plus généralement (suivant une idée de T. Kanzaki), si N est un R -module projectif de type fini et de rang 1, on parlera de formes bilinéaires ou de formes quadratiques.

2) Tout module alterné est antisymétrique. Inversement, si l'homothétie de rapport 2 dans N est inversible (ou si 2 est inversible dans R), alternée et antisymétrique sont synonymes. Si l'homothétie de rapport 2 est inversible dans N (ou dans R), il y a une bijection naturelle entre applications quadratiques et applications bilinéaires symétriques par $q \rightarrow \varphi_q$ et $\varphi \rightarrow q_\varphi(x) = \frac{1}{2} \varphi(x, x)$.

Si par contre $2 = 0$ dans N (ou dans R), q quadratique implique φ_q alternée car $\varphi_q(x, x) = 2q(x)$. De plus φ alternée entraîne φ symétrique et φ ε -symétrique ne dépend pas de ε .

1.3. Somme orthogonale

La somme orthogonale de deux objets (M, φ, N) et (M', φ', N') peut se définir même si N et N' sont distincts mais nous supposons ici toujours $N = N' : (M, \varphi, N) \perp (M', \varphi', N')$ c'est le module bilinéaire défini sur $M \oplus M'$ et à valeurs dans $N (= N')$ dont la forme $\varphi \perp \varphi'$ est donnée par la formule:

$$\varphi \perp \varphi'((x, x'), (y, y')) = \varphi(x, y) + \varphi'(x', y').$$

On définit de la même façon la somme orthogonale de deux modules quadratiques.

1.4 Morphismes

Les modules bilinéaires symétriques (resp. antisymétriques, resp. alternés, resp. quadratiques) forment une catégorie. Nous noterons Bil_N la sous-catégorie formée des objets (M, φ, N) , N fixé, où les morphismes sont les applications linéaires $u : M \rightarrow M'$ telles que le triangle

$$\begin{array}{ccc} M \times M & & \\ \downarrow u \times u & \searrow \varphi & \\ & N & \text{est commutatif.} \\ & \nearrow \varphi' & \\ M' \times M' & & \end{array}$$

La somme orthogonale est alors un foncteur de $\text{Bil}_N \times \text{Bil}_N$ dans Bil_N , associatif et commutatif à isomorphisme près. On définit de façon analogue les catégories Sym_N , ASym_N , Alt_N , $\text{Quad}_N \dots$ La définition de la somme orthogonale de deux modules quadratiques montre que

$$(1) \quad \varphi_{q \perp q'} \cong \varphi_q \perp \varphi_{q'}$$

ce qui s'écrit encore en disant que le carré suivant est commutatif à isomorphisme près:

$$\begin{array}{ccc} & \perp & \\ \text{Quad}_N \times \text{Quad}_N & \longrightarrow & \text{Quad}_N \\ \varphi \times \varphi \downarrow & \perp & \downarrow \varphi \\ \text{Bil}_N \times \text{Bil}_N & \longrightarrow & \text{Bil}_N \end{array}$$

1.5. Formes non dégénérées

Soit (M, φ, R) une forme bilinéaire. À φ sont associées deux applications linéaires de M dans son dual $M^* = \text{Hom}(M, R)$, s_φ et d_φ définies par $s_\varphi(x)(y) = \varphi(x, y)$ et $d_\varphi(x)(y) = \varphi(y, x)$. Comme φ est ε -symétrique, $d_\varphi = \varepsilon s_\varphi$. On dira que φ (où (M, φ)) est non dégénérée si d_φ , et donc s_φ , est un isomorphisme de R -modules. Cela implique, en transposant d_φ , que M est *réflexif*. Dans le cas d'une forme quadratique, on dira que q est non dégénérée si la forme bilinéaire symétrique associée φ_q l'est.

Une généralisation peut se faire aux cas d'applications bilinéaires (ou quadratiques), le cas le plus intéressant étant celui où N est projectif de type fini et de rang 1 (on notera que dans ce cas un R -module projectif de type fini M est *N-réflexif* en ce sens que l'application naturelle $C_{M, N} : M \rightarrow \text{Hom}(\text{Hom}(M, N), N)$ est un isomorphisme de modules). On dira donc, dans ce cas, que (M, φ, N) est non dégénéré si $s_\varphi : M \rightarrow \text{Hom}(M, N)$ est un isomorphisme de R -modules, et de même dans le cas quadratique. Ainsi par exemple si P est projectif de type fini et de rang 2, le triple $(P, \Lambda, \Lambda^2 P)$ où $\Lambda(x, y) = x_\Lambda y$ est un module alterné non dégénéré.

Notons les propriétés suivantes: la somme orthogonale de deux formes non dégénérées est non dégénérée; un lemme classique ([1]) dit que si $u : (M, \varphi, N) \rightarrow (M', \varphi', N)$ est un morphisme de formes bilinéaires et si φ est non dégénérée, u identifie M à un facteur direct de M' et il existe un sous-module M'' de M' tel qu'en désignant par φ'' la restriction de φ' à M'' , on ait un isomorphisme:

$$(M', \varphi') \cong (M, \varphi) \perp (M'', \varphi'').$$

1.6. Extension des scalaires

Soit $R \rightarrow S$ un homomorphisme d'anneaux et (M, φ, N) (resp. (M, q, N)) un module bilinéaire (resp. quadratique). Il existe sur le couple de S -modules $(M \otimes_R S, N \otimes_R S)$ une application bilinéaire φ_S (resp. quadratique q_S) unique telle que $\varphi_S(x \otimes s, y \otimes s') = \varphi(x, y) \otimes ss'$ (resp. $q_S(x \otimes s) = q(x) \otimes s^2$). Dans le cas quadratique, on a $\varphi_{q_S} \cong (\varphi_q)_S$. L'extension des scalaires ainsi définie commute à la somme orthogonale.

Si le module bilinéaire φ (ou q) est non dégénéré, il en est de même de φ_S (ou q_S) quelle que soit $R \rightarrow S$. En sens inverse, si M est projectif de type fini, la forme φ (ou q) est non dégénérée si et seulement si toutes ses localisées (extension aux anneaux $R_{\underline{m}}$, $\underline{m}$ maximal, ou $R_{\underline{p}}$, $\underline{p}$ premier) sont non dégénérées.

1.7. Espaces hyperboliques

Soient M et N deux modules et $h(M, N) = M \oplus \text{Hom}(M, N)$: ce dernier possède une structure bilinéaire naturelle, ε -symétrique ou quadratique obtenue en posant

$$\begin{cases} \varepsilon \varphi((x, f), (y, g)) = f(y) + \varepsilon g(x) \\ q(x, f) = f(x) \end{cases}$$

où $x, y \in M, f, g \in \text{Hom}(M, N)$. On a $\varphi_q = {}_1\varphi$ et ${}_1\varphi$ est alternée.

Ce module bilinéaire (ou quadratique) s'appelle l'espace hyperbolique du couple (M, N) , ou de M , si N est fixé. On a l'isomorphisme canonique suivant: $h(M \oplus M', N) \cong h(M, N) \perp h(M', N)$. Si $\alpha: M_1 \rightarrow M_2$ est un isomorphisme de modules, $h(\alpha): h(M_1, N) \rightarrow h(M_2, N)$ donné par la matrice $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & {}_{t_\alpha} - 1 \end{pmatrix}$ est un isomorphisme de modules bilinéaires. Ainsi $h(\cdot, N)$ est un foncteur covariant de la catégorie des R -modules, avec pour morphismes les isomorphismes, dans la catégorie Bil_N (ou Quad_N), qui commute à la somme, directe pour les R -modules, orthogonale pour les modules bilinéaires ou quadratiques.

La non dégénérescence de $h(M, N)$ est liée à la réflexivité de M ; soit $C_{M, N}: M \rightarrow \text{Hom}(\text{Hom}(M, N), N)$ l'application canonique qui à m associe $f \mapsto \hat{m}(f) = f(m)$. La matrice de $s_\varphi: M \oplus \text{Hom}(M, N) \rightarrow \text{Hom}(M, N) \oplus \text{Hom}(\text{Hom}(M, N), N)$ est la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1_{\text{Hom}(M, N)} \\ {}_\varepsilon C_{M, N} & 0 \end{pmatrix}$ si bien que $h(M, N)$ est non dégénéré si et seulement si M est N -réflexif, c'est-à-dire si $C_{M, N}$ est un isomorphisme. Si on suppose que $M \in \mathcal{P}(R)$ et que N est projectif de type fini et de rang 1, alors $h(M, N)$ est non dégénéré.

1.8. Espaces métaboliques

Rappelons que dans un module bilinéaire (M, φ, N) , deux éléments x et y de M sont dits *orthogonaux* si $\varphi(x, y) = 0$. Si M_1 est un sous-module M , les éléments de M orthogonaux à tous les éléments de M_1 forment un sous-module noté $M_1^\perp$, l'*orthogonal* de M_1 . Le sous-module M_1 de M est dit *totalement isotrope* s'il est contenu dans son orthogonal (dans le cas d'un module quadratique, on rajoute la condition $q(x) = 0$ quel que soit x dans M_1).

Définition. Un module bilinéaire (M, φ, N) non dégénéré où N est projectif de type fini et de rang 1 est *métabolique* s'il existe un sous-module M_1 de M totalement isotrope et égal à son orthogonal.

Dans le cas quadratique, on définira de même un module métabolique. Un module hyperbolique $h(M, N)$ est métabolique s'il est non dégénéré: il suffit de prendre pour M_1 , M ou bien $\text{Hom}(M, N)$. Dans le cas des modules quadratiques, on a la réciproque bien connue: modules quadratiques métaboliques et hyperboliques coïncident.

Dans le cas bilinéaire, symétrique par exemple, soit R^2 muni de la forme bilinéaire $\varphi((x, y), (x', y')) = xy' + x'y + yy'$. C'est un module métabolique avec $M_1 = R(1, 0) = \text{Re}_1$ et soit $e_2 = (0, 1)$. Pour que (R^2, φ) soit hyperbolique, il est nécessaire et suffisant qu'il existe $z = xe_1 + ye_2$ tel que $\varphi(z, z) = 0$ et tel que (e_1, z) soit une base de R^2 , c'est-à-dire $y \in U(R)$ ou encore $y = 1$. Or, $\varphi(xe_1 + e_2, xe_1 + e_2) = 1 + 2x$ ne peut être nul que si 2 est inversible dans R . Le module (R^2, φ) est donc hyperbolique si et seulement si $2 \in U(R)$. De façon générale, si 2 est inversible dans R , les notions de modules métaboliques et de modules hyperboliques sont les mêmes.

Sans faire d'hypothèse sur 2, considérons un module métabolique (M, φ, N) et soit P un sous-module de M tel que $P^\perp = P$. Alors en tant que R -module, M s'identifie à $P \oplus \text{Hom}(P, N)$ et l'application linéaire associée à φ de $P \oplus \text{Hom}(P, N)$ dans $\text{Hom}(P, N) \oplus \text{Hom}(\text{Hom}(P, N), N)$ a une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 1_{\text{Hom}(P, N)} \\ \varepsilon C_{P, N} & \alpha \end{pmatrix}$ où $C_{P, N}$ est l'application canonique de P dans le N -bidual de P . On voit alors que M est hyperbolique si et seulement si il existe un supplémentaire P' de P isomorphe à $\text{Hom}(P, N)$ tel que l'application α' obtenue comme α est l'application nulle. Or, un calcul facile montre que la forme $(x, y) \xrightarrow{\bar{\alpha}} \alpha(x)(y)$ est ε -symétrique et que $\bar{\alpha}'$ et $\bar{\alpha}$ diffère par une forme $T(\beta) = \beta + \varepsilon \tilde{\beta}$ où $\tilde{\beta}(x, y) = \beta(y, x)$, de sorte que M est métabolique si et seulement si $\bar{\alpha}$ est de la forme $T(\beta)$. Il est alors facile de voir que c'est toujours le cas si 2 est inversible dans R .

1.9. Groupes universels

En nous restreignant à des sous-catégories pleines convenables de modules bilinéaires (ou quadratiques), nous allons définir divers groupes universels. Soit $N \in \underline{\text{Pic}}(R)$; on appelle Symbil (N) (resp. As (N) , Alt (N) ,

$\text{Quad}(N)$) la sous-catégorie formée des modules bilinéaires symétriques (M, φ, N) (resp. antisymétriques, alternés, quadratiques) non dégénérés dont le module sous-jacent M est projectif de type fini. Le formalisme de la K -théorie algébrique ([1], Ch. 1) est adapté à ces situations. Ainsi à l'aide de la somme orthogonale on obtient des groupes abéliens qu'on note $K_0^{\text{Symbil}}(N)$, $K_0^{\text{As}}(N)$, $K_0^{\text{Alt}}(N)$, $K_0^Q(N)$: ce sont les groupes universels (ou de Groethendieck) pour les applications f de l'ensemble des classes d'isomorphisme d'objets de la catégorie correspondante dans les groupes abéliens G tels que $f(M \perp M') = f(M) + f(M')$ dans G .

Soit alors $K_0(R)$ le groupe de Groethendieck de la catégorie $\underline{P}(R)$ des R -modules projectifs de type fini et notons $[M]$ la classe dans ce groupe du module M . L'application f qui au module bilinéaire M associe $[M]$ (foncteur oubli) induit d'après le caractère universel des groupes définis ci-dessus des homomorphismes de groupes abéliens $K_0^\bullet(F) : K_0^\bullet(N) \rightarrow K_0(R)$ (le point $\bullet$ remplaçant Symbil, As, Alt ou Q). Inversement, l'isomorphisme naturel $h(P_1, N) \perp h(P_2, N) \cong h(P_1 \oplus P_2, N)$ pour P_1 et P_2 dans $\underline{P}(R)$ induit des homomorphismes $K_0^\bullet(H) : K_0(R) \rightarrow K_0^\bullet(N)$. Dans le cas quadratique, on appelle groupe de Witt *des types de formes quadratiques* de N , le conoyau de $K_0^Q(H)$.

Dans les autres cas, on peut définir deux groupes de Witt selon que l'on considère comme triviaux les modules hyperboliques ou plus généralement les modules métaboliques. Mais, en fait, les deux groupes obtenus sont canoniquement isomorphes.

Ces groupes de Groethendieck et de Witt commutent à l'extension des scalaires du fait de la propriété analogue de la somme orthogonale. Il en est de même pour les homomorphismes $K_0^\bullet(F)$ et $K_0^\bullet(H)$.

Fixons la notation suivante: si (M, φ, N) (resp. (M, q, N)) est un module bilinéaire (resp. quadratique), on notera $[(M, \varphi)]$ ou $[\varphi]$ (resp. $[(M, q)]$ ou $[q]$) son image dans $K_0^\bullet(N)$. On abrègera K_0^{Symbil} en K_0^{SB} .

2. STRUCTURES MULTIPLICATIVES

Le groupe de Groethendieck $K_0(R)$ est muni d'une structure d'anneau (commutatif et unitaire) par le produit tensoriel. Nous allons voir que pour les modules bilinéaires et quadratiques nous avons une situation analogue qui enrichit les groupes $K_0^\bullet(N)$ de structures supplémentaires.