

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 26 (1980)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LEVINE'S FORMULA IN KNOT THEORY AND QUADRATIC
RECIPROCITY LAW
Autor: Libgober, A.
Kapitel: §3. Proof of the main theorem
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-51077>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 01.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Otherwise

$$(15) \quad \gamma_{\mathfrak{p}}^{\chi}(2q) = 1.$$

Remark. The condition on $\det \tilde{q}$ implies non-degeneracy of q at $\mathfrak{p}$.

§ 3. PROOF OF THE MAIN THEOREM

Note that the rank of q is even because determinant of the associated bilinear form is odd. Therefore

$$(16) \quad \gamma_v^{\chi}(aq) = \left(\frac{a}{(\det \tilde{q})} \right) \gamma_v^{\chi}(q)$$

for any character χ .

Now let us apply the Weil reciprocity law for the character χ with support in dyadic components equal to the integers in the corresponding ring, and to the forms q and $2q$.

We have

$$\prod_v \gamma_v^{\chi}(2q) = 1$$

$$\prod_v \gamma_v^{\chi}(q) = 1.$$

For an archimedean components we have $\gamma_v^{\chi}(2q) = \gamma_v^{\chi}(q)$ because both depend only on the signatures. Therefore dividing those two identities, and using lemma 2 and (16) we obtain the identity (4).

Remark. Levine's lemma which in a specialization of the theorem for $R = \mathbf{Z}$ in fact follows from Milgram's formula (12). We should not worry about ramification. Therefore lemma 1 can be used for the character χ_0 and is actually a classical property of Gauss sums ([2]). Lemma 2 in this case essentially contains in [1].

§ 4. PROOF OF THE LEMMAS

Proof of lemma 1. The Witt group of quadratic forms over a field of zero characteristic is generated by one-dimensional forms ([4]). Because γ^{χ} is a character of the Witt group it is enough to check the lemma for forms of one variable. Let π be a local parameter. Suppose that $q(x) = \alpha \pi^b x^2$,