

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 26 (1980)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** ON SHARP ELEMENTARY PRIME NUMBER ESTIMATES  
**Autor:** Diamond, Harold G. / Erdős, Paul

**Bibliographie**  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-51076>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 15.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

In the first sum we use the bound  $|G_T(x/i)| \leq 3T/2$ , which is easily deduced from (4); for the second sum we calculate  $G_T(y)$  directly for  $T-1 \leq y < TK$ , and let  $U = U(T, K)$  and  $L = L(T, K)$  denote the upper and lower bounds for  $G_T$  on this interval.

Combining the estimates we obtain

$$(5) \quad \psi(x) - \psi\left(\frac{x}{T-1}\right) - \frac{3}{2} T \psi\left(\frac{x}{TK}\right) + L \left\{ \psi\left(\frac{x}{T-1}\right) - \psi\left(\frac{x}{TK}\right) \right\} \\ \leq x m_1(T) + O(T \log ex),$$

$$(6) \quad \psi(x) - \psi\left(\frac{x}{T-1}\right) + \frac{3}{2} T \psi\left(\frac{x}{TK}\right) + U \left\{ \psi\left(\frac{x}{T-1}\right) - \psi\left(\frac{x}{TK}\right) \right\} \\ \geq x m_1(T) + O(T \log ex).$$

We give an upper estimate of  $\psi(x)/x$  using (5) with  $T = 100$ ,  $TK = 8911$ ,  $L \geq -4.9054$ ,  $m_1(100) \leq 1.00104$ , and Chebyshev's bound  $\limsup \psi(x)/x < 1.1056$ . We find that  $\limsup \psi(x)/x < 1.085$ . We estimate  $\psi(x)/x$  from below by using (6) with  $T = 101$ ,  $TK = 17749$ ,  $U \leq 7.2930$ ,  $m_1(101) \geq 1.00134$  and the preceding upper estimate of  $\psi(x)/x$ . We find that  $\liminf \psi(x)/x > .924$ .

Might Chebyshev have improved his bounds for  $\psi(x)/x$  if he had used this method? We must report that that is quite unlikely, because considerable calculation was needed to obtain the modest improvement we have achieved.

NOTE ADDED IN PROOF. Diamond and Kevin Mc Curley have found another sharp elementary estimation method. Their article "Constructive elementary estimates for  $M(x)$ " will appear in *Number Theory — Proceedings of a conference held at Temple University, May 1980*, Lectures Notes in Math., Springer-Verlag, Berlin.

#### REFERENCES

- [1] CHEBYSHEV, P. L. Mémoire sur les nombres premiers. *J. Math. Pure Appl.* 17 (1852), 366-390. Also appears in *Mémoires présentés à l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg par divers Savants et lus dans ses Assemblées* 7 (1854), 15-33. Also appears in *Œuvres* v. 1 (1899), 49-70.

- [2] INGHAM, A. E. *The distribution of prime numbers*. Cambridge Tracts, No. 30, Cambridge, 1932. Reprinted by Hafner, New York, 1971.
- [3] LANDAU, E. *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*. Teubner, Leipzig, 1927. Reprinted with an appendix by P. T. Bateman, Chelsea, New York, 1953.
- [4] MATHEWS, G. B. *Theory of Numbers*. Part 1, Deighton, Bell, Cambridge, 1892.

(Reçu le 20 janvier 1980)

Harold G. Diamond

Department of Mathematics  
University of Illinois  
Urbana, Illinois 61801

Paul Erdős

Hungarian Academy of Science  
Reáltanoda U. 13-15  
Budapest

**Vide-leer-empty**