Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 26 (1980)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LEMMES DE HENSEL POUR LES OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS. APPLICATION A LA RÉDUCTION FORMELLE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

Autor: Robba, P.

Kapitel: 3. Application aux points singuliers irréguliers

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-51075

3. Application aux points singuliers irréguliers

Dans ce paragraphe nous supposons que *la valuation de* K *est discrète* et que *le corps résiduel est de caractéristique* 0.

L'exemple le plus important est celui où $K = k((x))$ muni de sa valuation x-adique avec k de caractéristique 0.

Donnons un autre exemple. Soit L un corps valué de caractéristique 0 muni d'une dérivation δ, par exemple $L = k(y)$ ou $L = k((y))$ avec k de caractéristique 0 et $\delta = \frac{d}{dy}$. Prenons $K = L((x))$ muni de sa valuation x-adique. On mettra sur K l'unique dérivation continue ∂ telle que $\partial(a) = \delta(a)$ pour $a \in L$ et $\partial(x) = 1$. (Nous ignorons si cet exemple présente de l'intérêt).

3.1. Lemme. *Soit* K *valué complet muni d'une valuation discrète et d'une dérivation* ∂ *continue, ayant un corps résiduel de caractéristique* 0. *Soit* L *une extension algébrique de* K. *Alors la dérivation s'étend d'une façon unique à* L *et l'on a*

$$\alpha_L(\partial) = \alpha_K(\partial). \tag{3.1.1}$$

Rappelons que la valuation de K s'étend aussi de façon unique à L, car K est complet.

L'intérêt de ce lemme est de montrer que si $P \in D_K$ est fuchsien en tant qu'élément de D_L il est également fuchsien en tant qu'élément de D_K.

Démonstration. Il est bien connu que la dérivation s'étend de façon unique. Tout ce qu'il faut montrer est la relation (3.1.1).

Si $P \in K[X]$, $P = \Sigma\, a_i X^i$, on écrira $P' = \Sigma\, i\, a_i X^{i-1}$ et $\partial(P) = \Sigma\, \partial(a_i) X^i$.

Par récurrence on peut se ramener au cas où il n'y a pas d'extension algébrique de K entre K et L. Soit $n = [L:K]$. Soit $u \in L \setminus K$. Comme la valuation de K est discrète, il existe $a \in K$ tel que $v(u-a) = \sup_{b \in K} v(a-b)$. Posons $w = u - a$.

Si L n'est pas ramifié sur K, il existe $b \in K$ tel que $w = bz$ et $v(z) = 0$. Soient $\bar{L}$ et $\bar{K}$ les corps résiduels de L et K. Par construction de z on a $\bar{L} = \bar{K}(z)$. De plus $[\bar{L}:\bar{K}] = [L:K]$. Soit $P \in K[X]$ le polynôme minimal unitaire de z. Alors P a ses coefficients dans l'anneau de valuation de K.

Comme $\bar{P}(\bar{z}) = 0$, et que $\bar{P}$ n'est pas le polynôme nul, on en déduit aussitôt que $\bar{P}$ est de degré n et est irréductible sur $\bar{K}$. Comme $\bar{K}$ est de caractéristique nulle, $\bar{P}$ est premier avec $\bar{P}'$, et donc $\overline{P'(z)} = \bar{P}'(\bar{z}) \neq 0$, soit $v(P'(z)) = 0$. Par ailleurs si $P = \Sigma\, a_i X^i$, on a clairement $v(\partial(P)(z)) \geqslant \inf(v(a_i) + \alpha) \geqslant \alpha$. Comme

$$\partial(z) P'(z) + \partial(P)(z) = 0$$

on en déduit $v(\partial(z)) \geqslant v(\partial(P)(z)) - v(P'(z)) \geqslant \alpha = \alpha + v(z)$. Comme

$$\partial(w)/w = \partial(b)/b + \partial(z)/z$$

on a alors

$$v(\partial(w)) - v(w) \geqslant \inf\left(v(\partial(b)) - v(b), v(\partial(z)) - v(z)\right) \geqslant \alpha$$

et enfin, puisque $v(u) = v(a) \leqslant v(w)$ et $\partial(u)/u = \partial(a)/u + \partial(w)/u$

$$\begin{aligned} v(\partial(u)) - v(u) &\geqslant \inf\left(v(\partial(a)) - v(u), v(\partial(w)) - v(u)\right) \\ &\geqslant \inf\left(v(\partial(a)) - v(a), v(\partial(w)) - v(w)\right) \geqslant \alpha\,. \end{aligned}$$

Si L est ramifiée, alors L est totalement ramifié et $\Gamma(L) = \frac{1}{n}\Gamma(K)$ où $\Gamma(L)$ désigne le groupe des valeurs de L. Par construction de w, $\Gamma(L)$ est engendré sur $\Gamma(K)$ par $v(w)$, ce qui entraîne que, $P = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i \in K[X]$ étant le polynôme minimal unitaire de w, on a

$$nv(w) = v(a_o) < v(a_i) + iv(w) \qquad 1 \leqslant i \leqslant n-1\,.$$

Mais alors, puisque $wP'(w) = nw^n + \sum_{i=1}^{n-1} i\, a_i w^i$, on a

$$v(wP'(w)) = nv(w) = v(a_o)$$

car $v(n) = 0$, $\bar{K}$ étant de caractéristique 0. Par ailleurs

$$v(\partial(P)(w)) \geqslant \inf_{0 \leqq i \leqq n-1} (v(a_i) + \alpha + iv(w)) = v(a_o) + \alpha\,.$$

Comme $\partial(w) P'(w) + \partial(P)(w) = 0$, on en déduit

$$v(\partial(w)) - v(w) = v(\partial(P)(w)) - v(wP'(w)) \geqslant \alpha\,.$$

3.2. Théorème. *On suppose que la valuation de* K *est discrète et le corps résiduel de* K *de caractéristique* 0. *Soit* $P \in D_K$, $P \neq 0$. *Il existe une extension finie* L *de* K, *des* $\eta_i \in L\,(1 \leqslant i \leqslant q)$ *et des* $P_i \in D_L$ *fuchsiens tels qu'on ait*

1) $P(\partial) = P_1(\partial - \eta_1) \ldots P_q(\partial - \eta_q)$

2) $D_L/D_L P(\partial) \simeq \oplus\, D_L/D_L P_i(\partial - \eta_i)$.

3) *(Unicité). Dans la décomposition précédente on peut supposer que les* P_i *ne sont pas constants et que* $v(\eta_i - \eta_j) < \alpha$ *pour* $i \neq j$. *Alors, si l'on a, dans une même extension* L *une deuxième décomposition* $P(\partial) = P_1'(\partial - \xi_1) \ldots P_r'(\partial - \xi_r)$ *où les* P_i', ξ_i *vérifient les mêmes conditions que* P_i, η_i, *on a* $r = q$ *et il existe une permutation* σ *de l'ensemble* $[1, 2, \ldots, q]$ *telle que* $v(\eta_i - \xi_{\sigma(i)}) \geqslant \alpha$ *et*

$$D_L/D_L P_i(\partial - \eta_i) \simeq D_L/D_L P'_{\sigma(i)}(\partial - \xi_{\sigma(i)}) \qquad 1 \leqslant i \leqslant q\,.$$

Démonstration :

1) et 2) Notons $t_0 = \alpha$ et t_i, $i = 1, \ldots$, les valeurs exceptionnelles $<\alpha$, associées à P. Soit x une uniformisante de K. On appelle rang de Poincaré-Katz $r(P) = (\alpha - \inf\limits_{i \geq 0} t_i)/v(x)$. Nous allons démontrer le théorème par une double récurrence sur $(\deg P, r(P))$ ordonnés par l'ordre lexicographique; la récurrence commence soit à $\deg P = 1$ où le résultat est évident. soit à $r(P) = 0$ où il est aussi évident puisque cela signifie que P est fuchsien. (La récurrence ne porte sur $r(P)$ que pour les valeurs entières de $r(P)$).

D'après le théorème 2.3 et le corollaire 2.5 on peut se ramener au cas où P est t_1-extrémal avec $t_1 < \alpha$ (et alors $r(P) = (\alpha - t_1)/v(x)$). Deux cas peuvent se présenter.

Cas 1. t_1 n'appartient pas au groupe de valuation de K (c'est-à-dire $r(P)$ n'est pas entier). Soit L l'extension de K déterminée par le polynôme $P(X)$ et soit $\eta \in L$ une racine de $P(X)$. On a $t_1 = v(\eta) = \sup\limits_{z \in K} v(\eta - z)$. Comme le corps résiduel de K est de caractéristique nulle, d'après Ax [Ax], il existe un conjugué η' de η sur K avec $v(\eta' - \eta) = t_1$. Soit $R(X) = P(X + \eta)$. Le polynôme R s'annulant en 0 on a $n(R, t_1) > 0$; comme $\eta' - \eta$ est racine de R et $v(\eta' - \eta) = t_1$, on a $N(R, t_1) - n(R, t_1) > 0$. Il résulte alors de la proposition 1.11 que l'on a $n(P(\partial + \eta), t_1) = n(R, t_1) > 0$ et $N(P(\partial + \eta), t_1) - n(P(\partial + \eta), t_1) = N(R, t_1) - n(R, \eta) > 0$; le corollaire 2.5 nous permet alors d'abaisser le degré de P.

Cas 2. t_1 appartient au groupe de valuation de K (c'est-à-dire $r(P)$ est entier). Soit L_1 l'extension de K déterminée par le polynôme $P(X)$ et soit L l'extension maximale non ramifiée de K dans L_1. Si ξ est une racine de $P(X)$ (appartenant à L_1) il existe $\eta \in L$ tel que $v(\xi-\eta) > v(\xi) = v(\eta) = t_1$. Posons $R(X) = P(X+\eta)$. On a alors $n(R, t_1) > 0$ et d'après la proposition 1.11 $n(P(\partial+\eta), t_1) > 0$. Si $n(P(\partial+\eta), t_1) < N(P(\partial+\eta), t_1)$ on peut abaisser le degré de P grâce au corollaire 2.5. Si $n(P(\partial+\eta), t_1) = N(P(\partial+\eta), t_1)$ alors t_1 n'est pas exceptionnel pour $P(\partial+\eta)$ et l'on a $r(P(\partial+\eta)) < r(P(\partial))$. L'hypothèse de récurrence nous permet alors de conclure.

3) Commençons par quelques remarques qui découlent directement des définitions et de la proposition 1.11. Soit $P \in D_K$, fuchsien (c'est-à-dire α-dominant). Si $v(\eta) \geqslant \alpha$ alors $P(\partial+\eta)$ est également fuchsien (car $P(\partial)$ et $P(\partial+\eta)$ ont même fonction de valuation pour $t \leqslant \alpha$). Si $v(\eta) < \alpha$, alors $P(\partial+\eta)$ est $v(\eta)$-extrémal (en effet $P(X)$ α-dominant signifie que toutes les racines de $P(X)$ dans la clôture algébrique de K sont de valuation $\geqslant \alpha$, alors $R(X) = P(X+\eta)$ a toutes ses racines de valuation $v(\eta)$ ce qui entraîne que R est $v(\eta)$-extrémal et donc $P(\partial+\eta)$ aussi d'après 1.12).

Soit alors P le polynôme de l'énoncé et $P(\partial) = P_1(\partial-\eta_1) \dots P_q(\partial-\eta_q)$ une de ses décompositions comme en 1). Soit $\eta \in L$. Si $v(\eta-\eta_i) \geqslant \alpha$, $P_i(\partial+\eta-\eta_i)$ est fuchsien et $N(P_i(\partial+\eta-\eta_i), \alpha) = \deg P_i$. Si $v(\eta-\eta_i) < \alpha$, $P_i(\partial+\eta-\eta_i)$ est $v(\eta-\eta_i)$-extrémal et $N(P_i(\partial+\eta-\eta_i), \alpha) = 0$. D'après le théorème 1.6 on a alors $N(P(\partial+\eta), \alpha) = \sum_{v(\eta-\eta_i) \geqq \alpha} \deg P_i$.

Démontrons 3). Il est clair que dans la décomposition 1) on peut supposer les P_i non constants. Pour montrer que, l'on peut supposer $v(\eta_i-\eta_j) < \alpha$ pour $i \neq j$ on va procéder par induction sur le degré de P. D'après 1) il existe $\eta \in L$ (par exemple $\eta = \eta_1$) tel que $N(P(\partial+\eta), \alpha) \neq 0$. D'après le théorème 2.4 on a une factorisation $P(\partial+\eta) = P'(\partial)\, Q(\partial+\eta)$ avec P' fuchsien et $N(Q(\partial+\eta), \alpha) = 0$, et de plus on a

$$D_L/D_L P(\partial) \simeq D_L/D_L P_1'(\partial+\eta_1) \oplus D_L/D_L\, Q(\partial)$$

$\deg Q < \deg P$. Si maintenant dans la factorisation de Q,

$$Q(\partial) = Q_1(\partial-\xi_1) \dots Q_r(\partial-\xi_r)$$

avec $v(\xi_i-\xi_j) < \alpha$ pour $i \neq j$ on avait un indice i pour lequel $v(\xi_i-\eta) \geqslant \alpha$, alors on aurait $N(Q(\partial+\eta), \alpha) = N(Q(\partial+\xi_i), \alpha) = \deg Q_i > 0$ ce qui donne une contradiction.

Considérons maintenant une deuxième décomposition $P(\partial) = P'_1(\partial-\xi_1)\dots P'_r(\partial-\xi_r)$. Alors $N(P(\partial+\xi_j), \alpha) = \deg P'_j$. S'il n'y avait aucun indice i tel que $v(\xi_j-\eta_i) \geqslant \alpha$ on aurait, puisque $P(\partial+\xi_j) = P_1(\partial+\xi_j-\eta_1)\dots P_q(\partial+\xi_1-\eta_q)$, $N(P(\partial+\xi_j), \alpha) = 0$ ce qui est une contradiction. Il y a donc un η_i avec $v(\xi_j-\eta_i) \geqslant \alpha$ et cet η_i est évidemment unique. Par suite de l'unicité du facteur fuchsien établie au théorème 2.4 on a $D_L/D_L P'_j(\partial) \simeq D_L/D_L P_i(\partial+\xi_j-\eta_i)$ et donc $D_L/D_L P_j(\partial-\xi_j) \simeq D_L/D_L P_i(\partial-\eta_i)$.

3.3. *Perturbations.*

Nous nous limitons désormais au cas $K = k((x))$ avec k de caractéristique 0. Pour simplifier nous supposerons k algébriquement clos. Nous prenons la dérivation $\partial = x\dfrac{d}{dx}$. Alors $\alpha = 0$.

Si P est fuchsien et unitaire, alors P a ses coefficients dans l'anneau de valuation $\mathcal{O}$ de K. Le polynôme réduit $\bar{P}$ vu comme élément de $k[X]$ s'appelle le polynôme indiciel. On a bien sûr $\deg \bar{P} = \deg P$.

Soit $P \in D_K$. Soit $N = N(P, 0)$. Alors $v(a_N^{-1}P, 0) = 0$, c'est-à-dire $a_N^{-1}P \in \mathcal{O}[\partial]$, par réduction on voit que $\overline{a_N^{-1}P}$ est le polynôme indiciel de son facteur fuchsien (rappelons qu'on peut factoriser P à gauche ou droite, les polynômes différentiels ainsi obtenus ne sont pas les mêmes mais ils ont même polynôme indiciel). Il en résulte immédiatement que si pour $P, Q \in D_K$ on a $v(P-Q, 0) > v(P, 0)$ alors les facteurs fuchsiens de P et Q ont même polynôme indiciel.

THÉORÈME. *Soit* $P \in D_K$; *soient* $t_0 = 0 > t_1 > \dots > t_r$ *les valeurs exceptionnelles associées à* P, *posons* $s_i = N(P, t_i) - n(P, t_i)$ *(on a* $s_i > 0$*).*

1) *Soit* $Q \in D_K$, *avec* $\deg Q = \deg P$, *vérifiant*

$$v(P-Q, t_i) > v(P, t_i) - s_i t_i \qquad 0 \leqslant i \leqslant r. \tag{3.3.1}$$

Soit $P(\partial) = P_1(\partial-\eta_1)\dots P_q(\partial-\eta_q)$ *une décomposition de* P, *avec* $P_i \in D_L$ *fuchsiens et* $\eta_i \in L$ *vérifiant* $v(\eta_i-\eta_j) < 0$ *pour* $i \neq j, L = k((x^{1/p}))$ *étant une extension algébrique de* K. *Alors* Q *admet la décomposition*

$$Q(\partial) = Q_1(\partial-\eta_1)\dots Q_q(\partial-\eta_q)$$

où les $Q_i \in D_L$ *sont fuchsiens et* Q_i *et* P_i *ont même polynôme indiciel.*

2) *Soit* m *le plus grand entier* $\geqslant 0$ *tel qu'il existe deux racines* λ *et* μ *d'un même polynôme indiciel d'un des opérateurs fuchsiens* P_i *vérifiant* $|\lambda - \mu| = m$. *Si* $Q \in D_K$, *avec* $\deg Q = \deg P$, *vérifie*

$$v(P-Q, t_i) > v(P, t_i) - s_i t_i + m \qquad 0 \leqslant i \leqslant r \tag{3.3.2}$$

on a

$$D_K/D_K Q \simeq D_K/D_K P .$$

3) *Si* $Q \in D_K$ *vérifie* (3.3.2), *il existe un sous-*D_K*-module* N *de* $D_K/D_K\, Q$ *tel que*

$$D_K/D_K Q \simeq D_K/D_K P \oplus N .$$

Démonstration :

1) $P_j(\partial)$ est le facteur fuchsien de $P(\partial+\eta_j)$. Ce que l'on doit vérifier est que $Q(\partial+\eta_j)$ possède un facteur fuchsien qui a même polynôme indiciel que P_j. Il suffit pour cela que l'on ait

$$v\big(P(\partial+\eta_j) - Q(\partial+\eta_j), 0\big) > v\big(P(\partial+\eta_j), 0\big) . \tag{3.3.3}$$

Si $v(\eta_j) \geqslant 0$, (3.3.3) équivaut à la condition (3.3.1) pour $i = 0$.
Si $v(\eta_j) < 0$, alors $v(\eta_j)$ est une valeur exceptionnelle, soit $v(\eta_j) = t_i$.
Mais alors en vertu des propriétés de la fonction de valuation

$$\begin{aligned} v\big(P(\partial+\eta_j) - Q(\partial+\eta_j), 0\big) &\geqslant v\big(P(\partial+\eta_j) - Q(\partial+\eta_j), t_i\big) \\ &= v\big(P(\partial) - Q(\partial), t_i\big) . \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

Par ailleurs, on a $n\big(P(\partial+\eta_j), t_i\big) \leqslant s_i$ (car cette inégalité est vraie dans le cas commutatif) d'où

$$\begin{aligned} v\big(P(\partial+\eta_j), 0\big) &\leqslant v\big(P(\partial+\eta_j), t_i\big) - t_i n\big(P(\partial+\eta_j), t_i\big) \\ &\leqslant v\big(P(\partial), t_i\big) - t_i s_i . \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

La conjonction de (3.3.1) (3.3.4) et (3.3.5) nous donne (3.3.3).
On a donc les facteurs de $Q : Q_1(\partial-\eta_1) \dots Q_q(\partial-\eta_q)$. Comme

$$\deg Q = \deg P = \sum_{i=1}^{q} \deg P_i = \sum_{i=1}^{q} \deg Q_i$$

il n'y a pas d'autres facteurs.

2) Pour déterminer complètement $D_L/D_L P$ il faut déterminer les $D_L/D_L P_j(\partial-\eta_j)$. Or d'après la théorie de Fuchs si

$$(3.3.6) \qquad v\big(P_j(\partial)-Q_j(\partial),0\big) > m$$

on a $D_L/D_L\,P_j \simeq D_L/D_L\,Q_j$. Mais comme, si l'on a choisi P_j et Q_j unitaires,

$$v\big(P_j(\partial)-Q_j(\partial),0\big) \geqslant v\big(P(\partial+\eta_j)-Q(\partial+\eta_j),0\big)$$

grâce à (3.3.4) et (3.3.5) on voit que (3.3.2) entraîne (3.3.6). Par conséquent on a $D_L/D_L\,P \simeq D_L/D_L\,Q$ et donc $D_K/D_K\,P \simeq D_K/D_K\,Q$.

3) Soit L une extension de K où l'on peut factoriser P et Q. Le raisonnement précédent nous montre qu'on a

$$Q(\partial) = Q_1(\partial-\eta_1)\dots Q_q(\partial-\eta_q)\,Q'(\partial)$$

et $D_L/D_L\,Q = \bigoplus_i D_L/D_L\,Q_i(\partial-\eta_i) \oplus D_L/D_L\,Q'$. (Comme on n'a pas fait l'hypothèse $\deg P = \deg Q$ on n'a pas nécessairement Q' constant). D'après 2)

$$D_L/D_LP \simeq \bigoplus_i D_L/D_LP_i(\partial-\eta_i) \simeq \bigoplus_i D_L/D_L\,Q_i(\partial-\eta_i)$$

d'où

$$D_L/D_L\,Q \simeq D_L/D_LP \oplus D_L/D_L\,Q' \,.$$

Mais comme $D_L/D_L\,Q \simeq D_K/D_K\,Q \underset{K}{\otimes} L$ et $D_L/D_L\,P \simeq D_K/D_K\,P \underset{K}{\otimes} L$, la décomposition précédente provient d'une décomposition du D_K-module $D_K/D_K\,Q$.

BIBLIOGRAPHIE

[Am] Amice Y. *Les nombres p-adiques*. P.U.F. Collection Sup.

[Ax] Ax J. Zeros of polynomials over local fields the Galois action. *J. of algebra 15* (1970) pp. 417-428.

[De] Deligne P. *Equations différentielles à points singuliers réguliers*. Lecture notes in Mathematics n° 163 1970.

[Dw] Dwork B. and P. Robba. On ordinary linear p-adic differential equations. *Trans. of the A.M.S. vol. 231 n° 1* (1977) pp. 1-46.

[Ge] Gerard R. et A. Levelt. Invariants mesurant l'irrégularité. *Ann. Inst. Fourier 23 Fasc. 1* (1973) pp. 157-195.

[In] Ince E. L. *Ordinary differential equations*. Dover.

[Ka] Katz N. Nilpotent connections and the monodromy theorem. *IHES Publ. Math. n° 39* (1970) pp. 176-232.

[La] Lazard M. Les zéros des fonctions analytiques d'une variable sur un corps valué complet. *IHES Publ. Math. n° 14* (1962) pp. 47-75.