Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 26 (1980)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LEMMES DE HENSEL POUR LES OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS. APPLICATION A LA RÉDUCTION FORMELLE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

Autor: Robba, P.

Kapitel: 3. Application aux points singuliers irréguliers

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-51075

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 10.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

3. Application aux points singuliers irréguliers

Dans ce paragraphe nous supposons que *la valuation de K est discrète* et que *le corps résiduel est de caractéristique* 0.

L'exemple le plus important est celui où $K = k((x))$ muni de sa valuation x-adique avec k de caractéristique 0.

Donnons un autre exemple. Soit L un corps valué de caractéristique 0 muni d'une dérivation δ, par exemple $L = k(y)$ ou $L = k((y))$ avec k de caractéristique 0 et $\delta = \dfrac{d}{dy}$. Prenons $K = L((x))$ muni de sa valuation x-adique. On mettra sur K l'unique dérivation continue ∂ telle que $\partial(a) = \delta(a)$ pour $a \in L$ et $\partial(x) = 1$. (Nous ignorons si cet exemple présente de l'intérêt).

3.1. Lemme. *Soit K valué complet muni d'une valuation discrète et d'une dérivation ∂ continue, ayant un corps résiduel de caractéristique* 0. *Soit L une extension algébrique de K. Alors la dérivation s'étend d'une façon unique à L et l'on a*

$$\alpha_L(\partial) = \alpha_K(\partial). \tag{3.1.1}$$

Rappelons que la valuation de K s'étend aussi de façon unique à L, car K est complet.

L'intérêt de ce lemme est de montrer que si $P \in D_K$ est fuchsien en tant qu'élément de D_L il est également fuchsien en tant qu'élément de D_K.

Démonstration. Il est bien connu que la dérivation s'étend de façon unique. Tout ce qu'il faut montrer est la relation (3.1.1).

Si $P \in K[X]$, $P = \Sigma\, a_i X^i$, on écrira $P' = \Sigma\, i\, a_i X^{i-1}$ et $\partial(P) = \Sigma\, \partial(a_i) X^i$.

Par récurrence on peut se ramener au cas où il n'y a pas d'extension algébrique de K entre K et L. Soit $n = [L:K]$. Soit $u \in L \setminus K$. Comme la valuation de K est discrète, il existe $a \in K$ tel que $v(u-a) = \sup_{b \in K} v(a-b)$. Posons $w = u - a$.

Si L n'est pas ramifié sur K, il existe $b \in K$ tel que $w = bz$ et $v(z) = 0$. Soient $\bar{L}$ et $\bar{K}$ les corps résiduels de L et K. Par construction de z on a $\bar{L} = \bar{K}(z)$. De plus $[\bar{L}:\bar{K}] = [L:K]$. Soit $P \in K[X]$ le polynôme minimal unitaire de z. Alors P a ses coefficients dans l'anneau de valuation de K.

Comme $\bar{P}(\bar{z}) = 0$, et que $\bar{P}$ n'est pas le polynôme nul, on en déduit aussitôt que $\bar{P}$ est de degré n et est irréductible sur $\bar{K}$. Comme $\bar{K}$ est de caractéristique nulle, $\bar{P}$ est premier avec $\bar{P}'$, et donc $\overline{P'(z)} = \bar{P}'(\bar{z}) \neq 0$, soit $v(P'(z)) = 0$. Par ailleurs si $P = \Sigma\, a_i X^i$, on a clairement $v(\partial(P)(z)) \geqslant \inf(v(a_i) + \alpha) \geqslant \alpha$. Comme

$$\partial(z) P'(z) + \partial(P)(z) = 0$$

on en déduit $v(\partial(z)) \geqslant v(\partial(P)(z)) - v(P'(z)) \geqslant \alpha = \alpha + v(z)$. Comme

$$\partial(w)/w = \partial(b)/b + \partial(z)/z$$

on a alors

$$v(\partial(w)) - v(w) \geqslant \inf(v(\partial(b)) - v(b), v(\partial(z)) - v(z)) \geqslant \alpha$$

et enfin, puisque $v(u) = v(a) \leqslant v(w)$ et $\partial(u)/u = \partial(a)/u + \partial(w)/u$

$$\begin{aligned} v(\partial(u)) - v(u) &\geqslant \inf(v(\partial(a)) - v(u), v(\partial(w)) - v(u)) \\ &\geqslant \inf(v(\partial(a)) - v(a), v(\partial(w)) - v(w)) \geqslant \alpha\,. \end{aligned}$$

Si L est ramifiée, alors L est totalement ramifié et $\Gamma(L) = \frac{1}{n}\Gamma(K)$ où $\Gamma(L)$ désigne le groupe des valeurs de L. Par construction de w, $\Gamma(L)$ est engendré sur $\Gamma(K)$ par $v(w)$, ce qui entraîne que, $P = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i \in K[X]$ étant le polynôme minimal unitaire de w, on a

$$nv(w) = v(a_o) < v(a_i) + iv(w) \qquad 1 \leqslant i \leqslant n-1\,.$$

Mais alors, puisque $wP'(w) = nw^n + \sum_{i=1}^{n-1} i\, a_i\, w^i$, on a

$$v(wP'(w)) = nv(w) = v(a_o)$$

car $v(n) = 0$, $\bar{K}$ étant de caractéristique 0. Par ailleurs

$$v(\partial(P)(w)) \geqslant \inf_{0 \leqslant i \leqslant n-1} (v(a_i) + \alpha + iv(w)) = v(a_o) + \alpha\,.$$

Comme $\partial(w) P'(w) + \partial(P)(w) = 0$, on en déduit

$$v(\partial(w)) - v(w) = v(\partial(P)(w)) - v(wP'(w)) \geqslant \alpha\,.$$

3.2. THÉORÈME. *On suppose que la valuation de K est discrète et le corps résiduel de K de caractéristique* 0. *Soit $P \in D_K$, $P \neq 0$. Il existe une extension finie L de K, des $\eta_i \in L\,(1 \leqslant i \leqslant q)$ et des $P_i \in D_L$ fuchsiens tels qu'on ait*

1) $P(\partial) = P_1(\partial - \eta_1) \dots P_q(\partial - \eta_q)$

2) $D_L/D_L P(\partial) \simeq \oplus\, D_L/D_L P_i(\partial - \eta_i)$.

3) *(Unicité). Dans la décomposition précédente on peut supposer que les P_i ne sont pas constants et que $v(\eta_i - \eta_j) < \alpha$ pour $i \neq j$. Alors, si l'on a, dans une même extension L une deuxième décomposition $P(\partial) = P'_1(\partial - \xi_1) \dots P'_r(\partial - \xi_r)$ où les P'_i, ξ_i vérifient les mêmes conditions que P_i, η_i, on a $r = q$ et il existe une permutation σ de l'ensemble $[1, 2, \dots, q]$ telle que $v(\eta_i - \xi_{\sigma(i)}) \geqslant \alpha$ et*

$$D_L/D_L P_i(\partial - \eta_i) \simeq D_L/D_L P'_{\sigma(i)}(\partial - \xi_{\sigma(i)}) \qquad 1 \leqslant i \leqslant q\,.$$

Démonstration :

1) et 2) Notons $t_0 = \alpha$ et t_i, $i = 1, \dots$, les valeurs exceptionnelles $< \alpha$, associées à P. Soit x une uniformisante de K. On appelle rang de Poincaré-Katz $r(P) = (\alpha - \inf_{i \geqslant 0} t_i)/v(x)$. Nous allons démontrer le théorème par une double récurrence sur $(\deg P, r(P))$ ordonnés par l'ordre lexicographique; la récurrence commence soit à $\deg P = 1$ où le résultat est évident. soit à $r(P) = 0$ où il est aussi évident puisque cela signifie que P est fuchsien. (La récurrence ne porte sur $r(P)$ que pour les valeurs entières de $r(P)$).

D'après le théorème 2.3 et le corollaire 2.5 on peut se ramener au cas où P est t_1-extrémal avec $t_1 < \alpha$ (et alors $r(P) = (\alpha - t_1)/v(x)$). Deux cas peuvent se présenter.

Cas 1. t_1 n'appartient pas au groupe de valuation de K (c'est-à-dire $r(P)$ n'est pas entier). Soit L l'extension de K déterminée par le polynôme $P(X)$ et soit $\eta \in L$ une racine de $P(X)$. On a $t_1 = v(\eta) = \sup_{z \in K} v(\eta - z)$. Comme le corps résiduel de K est de caractéristique nulle, d'après Ax [Ax], il existe un conjugué η' de η sur K avec $v(\eta' - \eta) = t_1$. Soit $R(X) = P(X + \eta)$. Le polynôme R s'annulant en 0 on a $n(R, t_1) > 0$; comme $\eta' - \eta$ est racine de R et $v(\eta' - \eta) = t_1$, on a $N(R, t_1) - n(R, t_1) > 0$. Il résulte alors de la proposition 1.11 que l'on a $n(P(\partial + \eta), t_1) = n(R, t_1) > 0$ et $N(P(\partial + \eta), t_1) - n(P(\partial + \eta), t_1) = N(R, t_1) - n(R, \eta) > 0$; le corollaire 2.5 nous permet alors d'abaisser le degré de P.

Cas 2. t_1 appartient au groupe de valuation de K (c'est-à-dire $r(P)$ est entier). Soit L_1 l'extension de K déterminée par le polynôme $P(X)$ et soit L l'extension maximale non ramifiée de K dans L_1. Si ξ est une racine de $P(X)$ (appartenant à L_1) il existe $\eta \in L$ tel que $v(\xi-\eta) > v(\xi) = v(\eta) = t_1$. Posons $R(X) = P(X+\eta)$. On a alors $n(R, t_1) > 0$ et d'après la proposition 1.11 $n\big(P(\partial+\eta), t_1\big) > 0$. Si $n\big(P(\partial+\eta), t_1\big) < N\big(P(\partial+\eta), t_1\big)$ on peut abaisser le degré de P grâce au corollaire 2.5. Si $n\big(P(\partial+\eta), t_1\big) = N\big(P(\partial+\eta), t_1\big)$ alors t_1 n'est pas exceptionnel pour $P(\partial+\eta)$ et l'on a $r\big(P(\partial+\eta)\big) < r\big(P(\partial)\big)$. L'hypothèse de récurrence nous permet alors de conclure.

3) Commençons par quelques remarques qui découlent directement des définitions et de la proposition 1.11. Soit $P \in D_K$, fuchsien (c'est-à-dire α-dominant). Si $v(\eta) \geqslant \alpha$ alors $P(\partial+\eta)$ est également fuchsien (car $P(\partial)$ et $P(\partial+\eta)$ ont même fonction de valuation pour $t \leqslant \alpha$). Si $v(\eta) < \alpha$, alors $P(\partial+\eta)$ est $v(\eta)$-extrémal (en effet $P(X)$ α-dominant signifie que toutes les racines de $P(X)$ dans la clôture algébrique de K sont de valuation $\geqslant \alpha$, alors $R(X) = P(X+\eta)$ a toutes ses racines de valuation $v(\eta)$ ce qui entraîne que R est $v(\eta)$-extrémal et donc $P(\partial+\eta)$ aussi d'après 1.12).

Soit alors P le polynôme de l'énoncé et $P(\partial) = P_1(\partial-\eta_1) \dots P_q(\partial-\eta_q)$ une de ses décompositions comme en 1). Soit $\eta \in L$. Si $v(\eta-\eta_i) \geqslant \alpha$, $P_i(\partial+\eta-\eta_i)$ est fuchsien et $N\big(P_i(\partial+\eta-\eta_i), \alpha\big) = \deg P_i$. Si $v(\eta-\eta_i) < \alpha$, $P_i(\partial+\eta-\eta_i)$ est $v(\eta-\eta_i)$-extrémal et $N\big(P_i(\partial+\eta-\eta_i), \alpha\big) = 0$. D'après le théorème 1.6 on a alors $N\big(P(\partial+\eta), \alpha\big) = \sum_{v(\eta-\eta_i) \geqslant \alpha} \deg P_i$.

Démontrons 3). Il est clair que dans la décomposition 1) on peut supposer les P_i non constants. Pour montrer que, l'on peut supposer $v(\eta_i-\eta_j) < \alpha$ pour $i \neq j$ on va procéder par induction sur le degré de P. D'après 1) il existe $\eta \in L$ (par exemple $\eta = \eta_1$) tel que $N\big(P(\partial+\eta), \alpha\big) \neq 0$. D'après le théorème 2.4 on a une factorisation $P(\partial+\eta) = P'(\partial)\, Q(\partial+\eta)$ avec P' fuchsien et $N\big(Q(\partial+\eta), \alpha\big) = 0$, et de plus on a

$$D_L/D_L P(\partial) \simeq D_L/D_L P_1'(\partial+\eta_1) \oplus D_L/D_L Q(\partial)$$

$\deg Q < \deg P$. Si maintenant dans la factorisation de Q,

$$Q(\partial) = Q_1(\partial-\xi_1) \dots Q_r(\partial-\xi_r)$$

avec $v(\xi_i-\xi_j) < \alpha$ pour $i \neq j$ on avait un indice i pour lequel $v(\xi_i-\eta) \geqslant \alpha$, alors on aurait $N\big(Q(\partial+\eta), \alpha\big) = N\big(Q(\partial+\xi_i), \alpha\big) = \deg Q_i > 0$ ce qui donne une contradiction.

Considérons maintenant une deuxième décomposition $P(\partial) = P_1'(\partial-\xi_1)\dots P_r'(\partial-\xi_r)$. Alors $N(P(\partial+\xi_j),\alpha) = \deg P_j'$. S'il n'y avait aucun indice i tel que $v(\xi_j-\eta_i) \geqslant \alpha$ on aurait, puisque $P(\partial+\xi_j) = P_1(\partial+\xi_j-\eta_1)\dots P_q(\partial+\xi_1-\eta_q)$, $N(P(\partial+\xi_j),\alpha) = 0$ ce qui est une contradiction. Il y a donc un η_i avec $v(\xi_j-\eta_i) \geqslant \alpha$ et cet η_i est évidemment unique. Par suite de l'unicité du facteur fuchsien établie au théorème 2.4 on a $D_L/D_L P_j'(\partial) \simeq D_L/D_L P_i(\partial+\xi_j-\eta_i)$ et donc $D_L/D_L P_j(\partial-\xi_j) \simeq D_L/D_L P_i(\partial-\eta_i)$.

3.3. *Perturbations.*

Nous nous limitons désormais au cas $K = k((x))$ avec k de caractéristique 0. Pour simplifier nous supposerons k algébriquement clos. Nous prenons la dérivation $\partial = x\dfrac{d}{dx}$. Alors $\alpha = 0$.

Si P est fuchsien et unitaire, alors P a ses coefficients dans l'anneau de valuation $\mathcal{O}$ de K. Le polynôme réduit $\bar{P}$ vu comme élément de $k[X]$ s'appelle le polynôme indiciel. On a bien sûr $\deg \bar{P} = \deg P$.

Soit $P \in D_K$. Soit $N = N(P,0)$. Alors $v(a_N^{-1}P,0) = 0$, c'est-à-dire $a_N^{-1}P \in \mathcal{O}[\partial]$, par réduction on voit que $\overline{a_N^{-1}P}$ est le polynôme indiciel de son facteur fuchsien (rappelons qu'on peut factoriser P à gauche ou droite, les polynômes différentiels ainsi obtenus ne sont pas les mêmes mais ils ont même polynôme indiciel). Il en résulte immédiatement que si pour $P, Q \in D_K$ on a $v(P-Q,0) > v(P,0)$ alors les facteurs fuchsiens de P et Q ont même polynôme indiciel.

THÉORÈME. *Soit* $P \in D_K$; *soient* $t_0 = 0 > t_1 > \dots > t_r$ *les valeurs exceptionnelles associées à* P, *posons* $s_i = N(P,t_i) - n(P,t_i)$ *(on a* $s_i > 0$*).*

1) *Soit* $Q \in D_K$, *avec* $\deg Q = \deg P$, *vérifiant*

$$v(P-Q,t_i) > v(P,t_i) - s_i t_i \qquad 0 \leqslant i \leqslant r. \tag{3.3.1}$$

Soit $P(\partial) = P_1(\partial-\eta_1)\dots P_q(\partial-\eta_q)$ *une décomposition de* P, *avec* $P_i \in D_L$ *fuchsiens et* $\eta_i \in L$ *vérifiant* $v(\eta_i-\eta_j) < 0$ *pour* $i \neq j$, $L = k((x^{1/p}))$ *étant une extension algébrique de* K. *Alors* Q *admet la décomposition*

$$Q(\partial) = Q_1(\partial-\eta_1)\dots Q_q(\partial-\eta_q)$$

où les $Q_i \in D_L$ *sont fuchsiens et* Q_i *et* P_i *ont même polynôme indiciel.*

2) *Soit* m *le plus grand entier* $\geqslant 0$ *tel qu'il existe deux racines* λ *et* μ *d'un même polynôme indiciel d'un des opérateurs fuchsiens* P_i *vérifiant* $|\lambda - \mu| = m$. *Si* $Q \in D_K$, *avec* $\deg Q = \deg P$, *vérifie*

$$(3.3.2) \qquad v(P-Q, t_i) > v(P, t_i) - s_i t_i + m \qquad 0 \leqslant i \leqslant r$$

on a

$$D_K/D_K Q \simeq D_K/D_K P .$$

3) *Si* $Q \in D_K$ *vérifie* (3.3.2), *il existe un sous-*D_K*-module* N *de* $D_K/D_K Q$ *tel que*

$$D_K/D_K Q \simeq D_K/D_K P \oplus N .$$

Démonstration :

1) $P_j(\partial)$ est le facteur fuchsien de $P(\partial+\eta_j)$. Ce que l'on doit vérifier est que $Q(\partial+\eta_j)$ possède un facteur fuchsien qui a même polynôme indiciel que P_j. Il suffit pour cela que l'on ait

$$(3.3.3) \qquad v\big(P(\partial+\eta_j) - Q(\partial+\eta_j), 0\big) > v\big(P(\partial+\eta_j), 0\big) .$$

Si $v(\eta_j) \geqslant 0$, (3.3.3) équivaut à la condition (3.3.1) pour $i = 0$.
Si $v(\eta_j) < 0$, alors $v(\eta_j)$ est une valeur exceptionnelle, soit $v(\eta_j) = t_i$.
Mais alors en vertu des propriétés de la fonction de valuation

$$(3.3.4) \qquad \begin{aligned} v\big(P(\partial+\eta_j) - Q(\partial+\eta_j), 0\big) &\geqslant v\big(P(\partial+\eta_j) - Q(\partial+\eta_j), t_i\big) \\ &= v\big(P(\partial) - Q(\partial), t_i\big) . \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a $n\big(P(\partial+\eta_j), t_i\big) \leqslant s_i$ (car cette inégalité est vraie dans le cas commutatif) d'où

$$(3.3.5) \qquad \begin{aligned} v\big(P(\partial+\eta_j), 0\big) &\leqslant v\big(P(\partial+\eta_j), t_i\big) - t_i n\big(P(\partial+\eta_j), t_i\big) \\ &\leqslant v\big(P(\partial), t_i\big) - t_i s_i . \end{aligned}$$

La conjonction de (3.3.1) (3.3.4) et (3.3.5) nous donne (3.3.3).

On a donc les facteurs de $Q : Q_1(\partial-\eta_1) \dots Q_q(\partial-\eta_q)$. Comme

$$\deg Q = \deg P = \sum_{i=1}^{q} \deg P_i = \sum_{i=1}^{q} \deg Q_i$$

il n'y a pas d'autres facteurs.

2) Pour déterminer complètement $D_L/D_L P$ il faut déterminer les $D_L/D_L P_j(\partial-\eta_j)$. Or d'après la théorie de Fuchs si

$$(3.3.6) \qquad v\big(P_j(\partial) - Q_j(\partial), 0\big) > m$$

on a $D_L/D_L P_j \simeq D_L/D_L Q_j$. Mais comme, si l'on a choisi P_j et Q_j unitaires,

$$v\big(P_j(\partial) - Q_j(\partial), 0\big) \geqslant v\big(P(\partial + \eta_j) - Q(\partial + \eta_j), 0\big)$$

grâce à (3.3.4) et (3.3.5) on voit que (3.3.2) entraîne (3.3.6). Par conséquent on a $D_L/D_L P \simeq D_L/D_L Q$ et donc $D_K/D_K P \simeq D_K/D_K Q$.

3) Soit L une extension de K où l'on peut factoriser P et Q. Le raisonnement précédent nous montre qu'on a

$$Q(\partial) = Q_1(\partial - \eta_1) \dots Q_q(\partial - \eta_q)\, Q'(\partial)$$

et $D_L/D_L Q = \bigoplus_i D_L/D_L Q_i(\partial - \eta_i) \oplus D_L/D_L Q'$. (Comme on n'a pas fait l'hypothèse $\deg P = \deg Q$ on n'a pas nécessairement Q' constant). D'après 2)

$$D_L/D_L P \simeq \bigoplus_i D_L/D_L P_i(\partial - \eta_i) \simeq \bigoplus_i D_L/D_L Q_i(\partial - \eta_i)$$

d'où

$$D_L/D_L Q \simeq D_L/D_L P \oplus D_L/D_L Q' .$$

Mais comme $D_L/D_L Q \simeq D_K/D_K Q \underset{K}{\otimes} L$ et $D_L/D_L P \simeq D_K/D_K P \underset{K}{\otimes} L$, la décomposition précédente provient d'une décomposition du D_K-module $D_K/D_K Q$.

BIBLIOGRAPHIE

[Am] AMICE Y. *Les nombres p-adiques*. P.U.F. Collection Sup.

[Ax] AX J. Zeros of polynomials over local fields the Galois action. *J. of algebra 15* (1970) pp. 417-428.

[De] DELIGNE P. *Equations différentielles à points singuliers réguliers*. Lecture notes in Mathematics n° 163 1970.

[Dw] DWORK B. and P. ROBBA. On ordinary linear p-adic differential equations. *Trans. of the A.M.S. vol. 231 n° 1* (1977) pp. 1-46.

[Ge] GERARD R. et A. LEVELT. Invariants mesurant l'irrégularité. *Ann. Inst. Fourier 23 Fasc. 1* (1973) pp. 157-195.

[In] INCE E. L. *Ordinary differential equations*. Dover.

[Ka] KATZ N. Nilpotent connections and the monodromy theorem. *IHES Publ. Math. n° 39* (1970) pp. 176-232.

[La] LAZARD M. Les zéros des fonctions analytiques d'une variable sur un corps valué complet. *IHES Publ. Math. n° 14* (1962) pp. 47-75.