Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 25 (1979)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES ÉQUATIONS POLYNOMIALES DANS LES QUATERNIONS
Autor: Beck, Bernard
Kapitel: III. Quelques conséquences du théorème
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-50378

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

(i) $\Rightarrow$ (ii): Si $P(q') = 0$, alors $a \neq 0$ et $q' = -a^{-1}b$. Or $n(P) = P\bar{P} \equiv (aX+b)(\bar{a}X+\bar{b}) \equiv n(a)\,\Delta_{-a^{-1}b} \bmod \Delta_q$.
Or $-a^{-1}b = q'$ et $\Delta_{q'} = \Delta_q$, donc $n(P) \equiv 0 \bmod \Delta_q$. Donc Δ_q divise $n(P)$ dans $K[X]$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): évident.

(iii) $\Rightarrow$ (i): On a $n(P) \equiv (aX+b)(\bar{a}X+\bar{b}) \bmod \Delta_q$. Si $a = 0$, alors $n(P) \equiv n(b) \bmod \Delta_q$, donc $n(P)(q) = n(b) \neq 0$. Ceci est contraire à l'hypothèse. Donc $a \neq 0$. Par suite on a $n(P) \equiv n(a)\,\Delta_{-a^{-1}b} \bmod \Delta_q$. Comme $n(P)(q) = 0$, on a $\Delta_{-a^{-1}b}(q) = 0$; donc $\Delta_{-a^{-1}b} = \Delta_q$ et ainsi $P(-a^{-1}b) = 0$. $\square$

III. Quelques conséquences du théorème

Corollaire 1. *Supposons que H soit le corps des quaternions classiques sur le corps $\mathbf{R}$ des nombres réels. Alors, pour tout polynôme P de $H[X]$ non constant, il existe un quaternion q de H tel que $P(q) = 0$.*

Démonstration. On peut supposer que P n'a pas de racines dans $\mathbf{R}$. Alors, d'après le lemme 1, $n(P)$ n'a pas de facteur du premier degré dans $\mathbf{R}[X]$.

Soit Δ un polynôme irréductible de degré 2 dans $\mathbf{R}[X]$, divisant $n(P)$. Un tel Δ existe puisque degré $n(P) = 2$ degré $P \geqslant 2$. Or on sait qu'il existe un quaternion q tel que $\Delta_q = \Delta$ et le théorème nous dit qu'il existe un conjugué q' de q tel que $P(q') = 0$. $\square$

C'est le résultat (i) de Niven.

Corollaire 2. *Soit H un corps de quaternions généralisés de centre K. Un polynôme P de $H[X]$ admet une infinité de racines si et seulement s'il existe un polynôme irréductible Δ de degré 2 de $K[X]$ et un quaternion q tel que $\Delta = \Delta_q$ et Δ divise P.*

La démonstration est une conséquence triviale du lemme 2 et du théorème. Si $K = \mathbf{R}$, tout polynôme irréductible de degré 2 est le polynôme caractéristique d'un quaternion q, d'où le résultat (ii) de Niven.

Corollaire 3. *Soit H un corps de quaternions généralisés de centre K. Si le polynôme P de $H[X]$ n'a qu'un nombre fini de racines, celui-ci est inférieur ou égal au degré de P.*

Démonstration. D'après le théorème, à tout quaternion q tel que Δ_q divise $n(P)$, correspond un conjugué q' de q tel que $P(q') = 0$. Comme P n'a qu'un nombre fini de racines, q' est unique d'après le lemme 2. Comme degré $n(P) = 2$ degré P et degré $\Delta_q = 2$, on constate que P a au plus degré P racines distinctes et celles-ci sont deux à deux non conjuguées. □

Définition. Soit P un polynôme non nul de $H[X]$ n'ayant qu'un nombre fini de racines, et soit q un élément de H. On définit la multiplicité de q par rapport à P (notée $M_P(q)$) de la manière suivante:

$$M_p(q) = \begin{cases} 0 \ \ si \ \ P(q) \neq 0 \,, \\ \text{Max}\,\{k \in N \mid \Delta_q^k \text{ divise } n(P)\} \ \ si \ \ P(q) = 0 \,. \end{cases}$$

COROLLAIRE 3'. *Si* $P \in H[X]$ *n'a qu'un nombre fini de racines,* $q_1, \ldots, q_r$, *et* $n =$ degré P, *alors*

$$\sum_{i=1}^{r} M_p(q_i) \leqslant n \,.$$

Si, de plus, $K = \mathbf{R}$ *et* H *est le corps des quaternions classiques, alors* $\sum_{i=1}^{r} M_p(q_i) = n$ *et on peut dire que* P *a exactement* n *racines (avec multiplicités).*

Démonstration : évidente.

On a déterminé l'ensemble des racines d'un polynôme ainsi que leurs multiplicités. Il reste à déterminer les polynômes ayant un ensemble de racines données avec leurs multiplicités.

PROPOSITION. *Soient* H *un corps de quaternions généralisés de centre* K, $q_1, \ldots, q_r$ *des quaternions deux à deux non conjugués,* $n_1, \ldots, n_r$ *des entiers* $\geqslant 1$ *tels que* $\sum_{i=1}^{r} n_i = n$. *On suppose, de plus, que les* q_i *ne sont pas dans* K, *ce qui ne restreint pas la généralité, grâce au lemme* 1.

a) *Si pour tout* i, $1 \leqslant i \leqslant r$, *on a* $n_i = 1$, *alors il existe un unique polynôme unitaire de degré* n *de* $H[X]$, *qui ait pour seules racines les* q_i *avec* $1 \leqslant i \leqslant r$.

b) *S'il existe un* i, $1 \leqslant i \leqslant r$, *tel que* $n_i > 1$, *alors il existe une infinité de polynômes unitaires* P *de* $H[X]$ *de degré* n, *tels que* P *ait pour seules racines les* q_i, $1 \leqslant i \leqslant r$, *avec pour multiplicité* n_i.

Démonstration.

a) *Unicité.* Si P_1 et P_2 sont deux tels polynômes unitaires, $P_1 - P_2$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n - 1$, qui admet n racines deux à deux non conjugués, $q_1, \ldots, q_n$. Si $P_1 - P_2 \neq 0$, $\Delta_{q1} \otimes \ldots \otimes \Delta_{qn}$ divise $n(P_1 - P_2)$. Donc degré $n(P_1 - P_2) \geqslant 2n$. Or degré $n(P_1 - P_2) \leqslant 2(n-1)$, donc $P_1 = P_2$.

Existence. Remarquons que dans ce cas on a $n = r$. On procède par récurrence sur l'entier n. Le cas $n = 1$ étant trivial, soit Q un polynôme unitaire de degré $n - 1$ admettant $q_1, \ldots, q_{n-1}$ comme seules racines, les q_i $1 \leqslant i \leqslant n - 1$ étant deux à deux non conjugués. Alors si q_n n'est conjugué à aucun des q_i, $1 \leqslant i \leqslant n - 1$, on a $Q(q_n) \neq 0$. Posons $u = Q(q_n) \cdot q_n \cdot Q(q_n)^{-1}$
et

$$P(X) = (X - u)\, Q(X).$$

Par définition de la multiplication dans $H[X]$ on a $P(q) = Q(q) \cdot q - u\, Q(q)$ pour tout quaternion q et l'on en déduit:

$$P(q_i) = 0 \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant n - 1$$

et $P(q_n) = Q(q_n)\, q_n - \left(Q(q_n)\, q_n\, Q(q_n)^{-1}\right) Q(q_n) = 0.$
Ainsi P est un polynôme unitaire de degré n qui admet $q_1, \ldots, q_n$ comme racines. Montrons que P n'a pas d'autres racines. D'après la partie (ii) du théorème, Δ_{q_i} divise $n(P)$ pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant n$; comme degré $n(P) = 2n$, on a

$$n(P) = \prod_{i=1}^{n} \Delta_{q_i}.$$

Si q est une racine de P, Δ_q divise $n(P)$ d'après le théorème et donc il existe i, $1 \leqslant i \leqslant n$ tel que q et q_i soient conjugués. Si $q \neq q_i$, on sait d'après le lemme 2 que Δ_{q_i} divise P mais alors $\Delta_{q_i}^2$ divise $n(P)$ donc il exite $j \neq i$ tel que $\Delta_{q_j} = \Delta_{q_i}$ donc q_i et q_j sont conjugués, ce qui est contraire à l'hypothèse. On a donc nécessairement $q = q_i$. Le polynôme P ainsi construit n'a pas d'autres racines que les q_i, $1 \leqslant i \leqslant n$.

b) On généralise tout d'abord la définition de la multiplicité d'une racine d'un polynôme: Si $F \in K[X]$ et $q \in H$, posons

$$m_F(q) = \max\{k \in \mathbf{N} \mid (X - q)^k \text{ divise } F \text{ dans } K(q)[X]\}.$$

Si P est un polynôme quelconque de $H[X]$, on écrit $P = P_1 F$ comme en I, Résultat 4. Alors, pour tout quaternion q de H, on définit la multiplicité de q par rapport à P comme étant l'entier

$$M_P(q) = M_{P_1} \cdot (q) + m_F(q).$$

On constate que ceci est une bonne généralisation de la définition précédente.

Il faut alors démontrer deux résultats intermédiaires.

LEMME 3. *Soient* $P \in H[X]$ *et* $u \in H$. *On pose* $P_u(X) = (X-u)P(X)$. *Alors*

(i) $n(P_u) = n(P)\Delta_u$;

(ii) *si* q *est un quaternion tel que* $P(q) \neq 0$ *et* $P_u(q) = 0$, *on a* $u = P(q)\,q\,P(q)^{-1}$;

(iii) *si* q *n'est pas conjugué de* u, *on a* $M_P(q) = M_{P_u}(q)$.

Démonstration. (i) et (ii) sont évidents. Pour (iii), on constate que si q n'est pas conjugué de u, alors $(P(q) = 0) \Leftrightarrow (P_u(q) = 0)$, d'où le résultat cherché d'après (i) et la définition de la multiplicité. □

LEMME 4. *Soit un polynôme* P *de* $H[X]$, *admettant une racine* $q \notin K$ *dans* H, *telle que* Δ_q *ne divise pas* P *(i.e.* $P(q') \neq 0$ *pour tout conjugué* q' *de* q *distinct de* q*). Alors :*

(i) *si* q' *est un conjugué de* q *distinct de* q, *la quantité* $P(q')\,q'\,P(q')^{-1} = \tilde{q}$ *est une constante ne dépendant que de* P *et de* q *;*

(ii) *si* u *est un conjugué de* q *distinct de* $\tilde{q}$, *alors* $M_{P_u}(q) = M_P(q) + 1$.

Démonstration. (i) Posons $u_i = P(q_i)\,q_i\,P(q_i)^{-1}$, $i = 1, 2$, où q_1 et q_2 sont deux conjugués de q distincts de q. Alors P_{u_i} admet q et q_i comme racines. Donc, d'après le lemme 2, on a $P_{u_1}(q') = P_{u_2}(q') = 0$ pour tout conjugué q' de q, mais alors $u_1 P(q') = u_2 P(q')$. D'où l'on tire $u_1 = u_2$ en prenant $q' \neq q$.

(ii) Si u est un conjugué de q distinct de $\tilde{q}$, alors $P_u(q') \neq 0$ pour tout conjugué q' de q, distinct de q. Comme, d'autre part, $n(P_u) = n(P)\Delta_u = n(P)\Delta_q$ (Lemme 3 (i)), on a $M_{P_u}(q) = M_P(q) + 1$, d'après la définition de la multiplicité. □

Le quaternion q n'étant pas dans K, il a une infinité de conjugués $u \neq \tilde{q}$. La partie a) de la proposition et les lemmes 3 et 4 permettent alors d'achever la démonstration de b) par récurrence.