Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 25 (1979)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES ÉQUATIONS POLYNOMIALES DANS LES QUATERNIONS

Autor: Beck, Bernard

Kapitel: I. Rappels et notations

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-50378

SUR LES ÉQUATIONS POLYNOMIALES DANS LES QUATERNIONS

par Bernard Beck

Soit H un corps de quaternions généralisés, de centre K (voir [1]).

Le but de cet article est d'étudier les solutions dans H de l'équation

$$P(x) = q_n x^n + q_{n-1} x^{n-1} + \dots + q_0 = 0 \tag{1}$$

où $q_r \in H$, $r = 0, 1, \dots, n$ et $q_n \neq 0$.

Dans le cas où le corps K est le corps des nombres réels et H le corps des quaternions classiques, I. Niven [2] a démontré les résultats suivants:

(i) L'équation (1) admet toujours une solution dans H.

(ii) L'équation (1) admet une infinité de solutions dans H si et seulement si $P(x) = Q(x)(x^2 - 2tx + r)$ où $t, r \in K$, $t^2 < r$.

(iii) Si le nombre de solutions de (1) est fini, celui-ci est au plus $(2n-1)^2$.

On étudie ici l'équation (1) dans le cas le plus général, en reliant les solutions de (1) aux racines d'un polynôme $n(P)$ à une indéterminée à coefficients dans K: c'est le théorème de la partie II.

Dans la partie III, on étudie les conséquences de ce théorème et on montre notamment les résultats suivants:

— Si le nombre de solutions de (1) est fini, celui-ci est inférieur ou égal à n.

— Il existe un unique polynôme P unitaire de degré n à coefficients dans H admettant n racines 2 à 2 non conjuguées.

I. Rappels et notations

Soit H un corps de quaternions généralisés. On sait que H est un espace vectoriel de dimension 4 sur son centre K et qu'il existe sur H un antiautomorphisme involutif, $q \mapsto \bar{q}$, tel que, quels que soient les éléments λ de K et q, q' de H, on ait

$$\overline{q+q'} = \bar{q} + \bar{q}\,, \qquad \overline{qq'} = \bar{q}' \cdot \bar{q}\,, \qquad \bar{\bar{q}} = q\,, \qquad \bar{\lambda} = \lambda$$

(si la caractéristique de K est différente de 2, alors $K = \{\mu \in H \mid \bar{\mu} = \mu\}$, mais cela est faux en caractéristique 2). A tout quaternion q de H, on associe deux éléments de K

$$n(q) = q\bar{q} = \bar{q}q, \quad \text{appelé la } \textit{norme} \text{ de } q,$$
$$t(q) = q + \bar{q}, \quad \text{appelé la } \textit{trace} \text{ de } q,$$

ainsi que le polynôme de $K[X]$

$$\Delta_q(X) = X^2 - t(q)X + n(q)\,,$$

appelé polynôme caractéristique de q. On a alors $\Delta_q(q) = 0$. Citons sans démonstration les résultats suivants:

Résultat 1. Deux éléments q et q' de H sont conjugués (i.e. il existe $\sigma \in H^*$ tel que $q' = \sigma q \sigma^{-1}$), si et seulement s'ils ont même polynôme caractéristique.

Résultat 2. Le polynôme Δ_q est irréductible dans $K[X]$ si et seulement si q n'est pas dans K.

Résultat 3. Tout élément q de H qui n'est pas dans K admet une infinité de conjugués distincts.

Ces trois résultats montrent que si q n'est pas dans K, le polynôme $\Delta_q(X)$ a une infinité de racines dans H. Pour les autres propriétés des corps de quaternions, voir [1].

On considère l'anneau $H[X]$ des polynômes à une indéterminée à coefficients dans H où l'indéterminée commute avec les coefficients. Alors $H[X]$ est un $K[X]$-module à droite libre de rang 4; en effet, soit $\{q_1, ..., q_4\}$ une base du K-espace vectoriel H; tout polynôme P de $H[X]$ s'écrit de manière évidente

$$P(X) = \sum_{i=1}^{4} q_i F_i(X) \quad \text{avec} \quad F_i(X) \in K[X]\,.$$

Résultat 4. Tout polynôme P de $H[X]$ se factorise de manière unique en $P = P_1 F$ avec F unitaire dans $K[X]$, P_1 n'étant divisible par aucun polynôme non constant de $K[X]$.

Démonstration. On écrit $P(X) = \sum_{i=1}^{4} q_i F_i(X)$ comme précédemment et on prend pour F le P.G.C.D. des F_i. □

Résultat 5. $H[X]$ est un $K[X]$-module à droite euclidien, i.e. pour tout polynôme P de $H[X]$ et pour tout polynôme F de $K[X]$, il existe deux polynômes Q et R de $H[X]$ tels que degré $R <$ degré F et $P = QF + R$.

Démonstration. On écrit $P(X) = \sum_{i=1}^{4} q_i F_i(X)$ et on effectue la division euclidienne des F_i par F. $\square$

Etant donné un polynôme $P(X) = \sum_{r=0}^{n} q_r X^r$ dans $H[X]$, on pose $\bar{P}(X) = \sum_{r=0}^{n} \bar{q}_r X^r$ et

$$n(p) = P \cdot \bar{P} = \sum_{0 \leq r, s \leq n} q_r \bar{q}_s X^{r+s}.$$

Résultat 6. Le polynôme $n(P)$ est un élément de $K[X]$.

Démonstration. On a $n(P) = \sum_{l=0}^{2n} \alpha_l X^l$

et

$$\alpha_l = \sum_{\substack{1 \leq r, s \leq n \\ r+s=l}} q_r \bar{q}_s = a_l + \sum_{\substack{0 \leq r < s \leq n \\ r+s=l}} t(q_r \bar{q}_s),$$

où

$$a = \begin{cases} 0 & \text{si } l \text{ est impair} \\ n(q_{l/2}) & \text{si } l \text{ est pair} \end{cases}$$

Donc $\alpha_l \in K$. $\square$

Définissons à présent les racines d'un polynôme de $H[X]$. Tout élément $P(X) = \sum_{r=0}^{n} q_r X^r$ de $H[X]$ peut être considéré comme une fonction sur H en posant $P(x) = \sum_{r=0}^{n} q_r x^r$ pour tout x dans H, *la variable étant toujours à droite des coefficients*. La multiplication sur $H[X]$ ne définit pas une multiplication de fonctions au sens habituel; toutefois, si $P \in H[X]$ et si $F \in K[X]$, alors, pour tout élément x de H, on a

$$P.F(x) = P(x)F(x).$$

(On peut traduire cela en disant que $H[X]$ est canoniquement isomorphe en tant que $K[X]$-module à droite à l'ensemble des fonctions polynômes sur H à variable à droite.)

On dit qu'un quaternion x est *racine* du polynôme P si $P(x) = 0$.