**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique

**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

**Band:** 25 (1979)

**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** CORPS RÉSOLUBLES ET DIVISIBILITÉ DE NOMBRES DE CLASSES D'IDÉAUX

**Autor:** Satgé, Ph.

**Bibliographie**

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-50376

dérons l'extension $M = \mathbf{Q}(\zeta, \sqrt[5]{x})$. — C'est une extension galoisienne de degré 100 sur $\mathbf{Q}$; l'extension $M/\mathbf{Q}(\zeta)$ est de degré 5 et l'ensemble des 4 automorphismes non triviaux de $M/\mathbf{Q}(\zeta)$ est une classe de conjugaison de Gal $(M/Q)$ ; notons la $C$. — D'après le théorème de Tchebotarev, il existe une infinité de nombres premiers dont le Frobenius est cette classe de conjugaison. — Soit $p$ un tel nombre premier; il est totalement décomposé dans $\mathbf{Q}(\zeta)$ donc congru à 1 modulo 25, et il n'est pas totalement décomposé dans $M$ donc $x$ n'est pas une puissance 5-ième modulo $p$. — En conséquence, si $z = \pm p$, le nombre de classes du corps $\mathbf{Q}\left(\sqrt{\left(\frac{-5+\sqrt{5}}{2}\right)(x^2-4z^5)}\right)$ est divisible par 5 dès que $x^2 - 4z^5$ est divisible par 125. — Prenons $x = 2$ et $z = p$ alors $x^2 - 4z^5 = 4 - 4p^5 = y^2\delta$ est divisible par 125. — Pour un $\delta$ fixé l'équation $4 - 4p^5 = y^2\delta$ n'a, d'après le théorème de Thue, qu'un nombre fini de solutions; une infinité de $p$ étant permis, on obtient donc l'infinité de $\delta$ cherchée et ces $\delta$ sont clairement négatifs. — De même, en prenant $x = 11$ et $z = -p$, on obtient l'infinité de $\delta$ positifs cherchée. —

*Remarque.* On peut montrer qu'en fait, dans le cas $l = 5$, les conditions nécessaires à la divisibilité par 5 du nombre de classes de $\mathbf{Q}\left(\sqrt{\left(\frac{-5+\sqrt{5}}{2}\right)(x^2-4z^5)}\right)$ énoncées dans le théorème 4.3.1. sont suffisantes. —

## BIBLIOGRAPHIE


[1] GUT, Max. Relativquadratische Zahlkörper, deren Klassenzahl durch eine vorgegebene ungerade Primzahl teilbar ist. *Comment. Math. Helv. 2*. (1954), pp.270-277.

[2] NEUMANN, Olaf. Relativquadratische Zahlkorper, deren Klassenzahlen durch 3 teilbar sind. *Math. Machrichten 56* (1973), pp. 281--306.

[3] HONDA, Taira. On real quadratic fields whose class numbers are multiples of 3. *J. Reine Angew. Math. 233* (1968), pp. 101-102.

[4] GRAS, Georges. Extensions abéliennes non ramifiées de degré premier d'un corps quadratique. *Bull. Soc. Math. France 100* (1972), pp. 177-193.

[5] UCHIDA, Kenkichi. Unramifield extensions of quadratic number fields I. *Tôhoku Math. J. 22*:1 (1970), pp. 138-141.

[6] CHEVALLEY, Claude. Sur deux théorèmes d'arithmétiques. *J. of the Math. Soc. of Japan, 3* (1951), pp. 36-44.

[7] HECKE, E. *Vorlesungen über die Theorie der Algebraischen Zahlen.* Academic Verlag, Leipzig, 1923.

[8] SERRE, J. P. *Corps locaux.* Hermann. Paris.

[9] MORDELL, L. J. *Diophantine Equations.* Academic Press New York.

*(Reçu le 24 mai 1978)*

Philippe Satgé

Université de Caen
Département de Mathématiques
14032 Caen CEDEX.

NOTE.

Ce travail est un travail commun avec Pierre BARRUCAND. Seules des divergences sur la manière de présenter et de rédiger les résultats ont conduit à les publier sous le seul nom du rédacteur.