

<b>Zeitschrift:</b>	L'Enseignement Mathématique
<b>Herausgeber:</b>	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
<b>Band:</b>	25 (1979)
<b>Heft:</b>	1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
<b>Artikel:</b>	SUR CERTAINES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES LIÉES A LA LOI NORMALE
<b>Autor:</b>	Fuchs, Aimé / Letta, Giorgio
<b>Kapitel:</b>	4. Le théorème de Bernstein-Darmois
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-50371">https://doi.org/10.5169/seals-50371</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 20.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

- (a)  $\mu$  est normale;
- (b) il existe un voisinage  $V$  de l'origine dans  $\mathbf{R}$  et une application  $\theta$  de  $V$  dans  $\mathbf{C}$  telle que l'on ait

$$(3.2) \quad (\varphi(t))^2 = \varphi(t+u)\varphi(t-u)\theta(u)$$

pour tout couple  $t, u$  d'éléments de  $V$ .

*Démonstration.* Il suffit de démontrer l'implication (b)  $\Rightarrow$  (a). Supposons donc la propriété (b) vérifiée. Quitte à remplacer  $\varphi$  par  $\varphi\bar{\varphi}$ , on peut supposer  $\varphi$  réelle. L'équation (3.2) fournit alors, pour  $t = 0$ ,  $1 = (\varphi(u))^2\theta(u)$ , de sorte qu'elle peut s'écrire sous la forme équivalente

$$(\varphi(t)\varphi(u))^2 = \varphi(t+u)\varphi(t-u).$$

En particulier, pour  $t = u = s/2$ , on trouve  $(\varphi(s/2))^4 = \varphi(s)$ . La conclusion résulte alors du Théorème (1.2) pour  $c = 4$ .

(3.3) *Remarque.* Le cas d'une loi  $\mu$  dégénérée correspond à celui où l'équation (3.2) est vérifiée avec une fonction  $\theta$  identiquement égale à 1.

#### 4. LE THÉORÈME DE BERNSTEIN-DARMOIS

Soit  $(X_1, X_2)$  un couple de variables aléatoires réelles, de même loi. Si le couple  $(X_1 + X_2, X_1 - X_2)$  est formé de variables aléatoires indépendantes, alors la loi commune de  $X_1$  et de  $X_2$  est normale: c'est le théorème de Bernstein-Darmois sous sa forme primitive. Il fut d'abord démontré par S. Bernstein [1] avec l'hypothèse que la loi commune de  $X_1$  et de  $X_2$  possède des moments finis jusqu'à l'ordre 4. Plus tard G. Darmois [2] réussit à généraliser ce résultat, tout en s'affranchissant de l'hypothèse concernant l'existence des moments. Il employa à cet effet une technique de différences finies, qui lui permit également de démontrer une généralisation ultérieure, bien plus profonde, connue sous le nom de théorème de Skitovitch-Darmois (cf. [6]).

Nous présentons ci-dessous le théorème de Bernstein-Darmois, que nous démontrons à l'aide de l'équation fonctionnelle du paragraphe 3.

(4.1) THÉORÈME. Soit  $X$  un vecteur aléatoire à valeurs dans  $\mathbf{R}^2$ , dont les composantes  $X_1, X_2$  sont des variables aléatoires indépendantes. Soit  $A = (a_{ij})$  une matrice réelle  $(2, 2)$ , et supposons que les composantes du

vecteur aléatoire  $Y = AX$ , c'est-à-dire les deux variables aléatoires réelles  $Y_1, Y_2$  définies par

$$\begin{cases} Y_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 \\ Y_2 = a_{21}X_1 + a_{22}X_2 \end{cases},$$

soient elles aussi indépendantes. Alors, pour chaque indice  $i$  tel que la  $i$ -ème colonne de  $A$  soit formée d'éléments non nuls, la loi de  $X_i$  est normale (éventuellement dégénérée).

Pour rendre plus claire la démonstration, nous commencerons par démontrer un lemme préliminaire :

(4.2) LEMME. Soit  $X$  un vecteur aléatoire à valeurs dans  $\mathbf{R}^2$ , de composantes  $X_1, X_2$ , et soit  $\Phi$  sa fonction caractéristique. Les deux propriétés suivantes sont alors équivalentes :

- (a)  $(X_1, X_2)$  est un couple de variables aléatoires indépendantes ;
- (b) pour tout système de scalaires  $s_1, s_2, u, v$ , on a

$$\Phi(s_1, s_2)\Phi(s_1+u, s_2+v) = \Phi(s_1+u, s_2)\Phi(s_1, s_2+v).$$

*Démonstration du lemme.*

Il suffit de démontrer (b)  $\Rightarrow$  (a). Si l'on désigne par  $\varphi_i$  la fonction caractéristique de  $X_i$ , l'hypothèse (b) fournit (pour  $s_1 = s_2 = 0$ )

$$\Phi(u, v) = \Phi(u, 0)\Phi(0, v) = \varphi_1(u)\varphi_2(v),$$

c'est-à-dire l'indépendance du couple  $(X_1, X_2)$ .

*Démonstration du théorème.* Supposons, pour fixer les idées, que la première colonne de  $A$  soit formée d'éléments non nuls, et montrons que la loi de  $X_1$  est normale. Quitte à multiplier chacune des lignes de  $A$  par un scalaire convenable, on pourra supposer

$$(4.3) \quad a_{11} = a_{21} = 1.$$

1) Supposons d'abord que la matrice  $A$  soit singulière. En vertu de notre hypothèse on a alors  $Y_1 = Y_2$ . Par conséquent  $Y_1$  est indépendante d'elle-même, c'est-à-dire p.s. égale à une constante :

$$Y_1 = X_1 + a_{12}X_2 = c \quad \text{p.s. :}$$

il en résulte

$$X_1 = c - a_{12}X_2 \quad \text{p.s. ,}$$

de sorte que  $X_1$  est également indépendante d'elle même, c'est-à-dire p.s. égale à une constante.

2) Supposons maintenant que la matrice  $A$  ne soit pas singulière, et désignons par  $\varphi_i$  la fonction caractéristique de  $X_i$  et par  $\Phi$  celle de  $X$ :

$$(4.4) \quad \Phi(t_1, t_2) = \varphi_1(t_1) \varphi_2(t_2).$$

Désignons en outre par  $\psi$  la fonction caractéristique du vecteur aléatoire  $Y = AX$ , c'est-à-dire la fonction définie par

$$(4.5) \quad \psi(s_1, s_2) = \Phi(s_1 + s_2, s_1 a_{12} + s_2 a_{22}).$$

En appliquant le lemme précédent au couple de variables aléatoires indépendantes  $(Y_1, Y_2)$ , on trouve, pour tout système de scalaires  $s_1, s_2, u$ ,

$$\psi(s_1, s_2) \psi(s_1 + u, s_2 - u) = \psi(s_1 + u, s_2) \psi(s_1, s_2 - u).$$

Grâce à (4.5), cette relation s'écrit, en fonction de  $\Phi$ ,

$$\begin{aligned} & \Phi(s_1 + s_2, s_1 a_{12} + s_2 a_{22}) \Phi(s_1 + s_2, s_1 a_{12} + s_2 a_{22} + ua_{12} - ua_{22}) \\ &= \Phi(s_1 + s_2 + u, s_1 a_{12} + s_2 a_{22} + ua_{12}) \Phi(s_1 + s_2 - u, s_1 a_{12} + s_2 a_{22} - ua_{22}). \end{aligned}$$

Etant donné le scalaire  $t$ , choisissons maintenant  $s_1, s_2$  de façon à satisfaire aux conditions

$$\begin{cases} s_1 + s_2 = t \\ s_1 a_{12} + s_2 a_{22} = 0 \end{cases}$$

(ce qui est possible, car la matrice  $A$  n'est pas singulière). La relation précédente devient alors

$$\Phi(t, 0) \Phi(t, u(a_{12} - a_{22})) = \Phi(t + u, ua_{12}) \Phi(t - u, -ua_{22}),$$

c'est-à-dire, grâce à (4.4),

$$\begin{aligned} (4.6) \quad & \varphi_1(t) \varphi_2(0) \varphi_1(t) \varphi_2(u(a_{12} - a_{22})) \\ &= \varphi_1(t + u) \varphi_2(ua_{12}) \varphi_1(t - u) \varphi_2(-ua_{22}). \end{aligned}$$

Or, si  $|u|$  est assez petit, on a  $\varphi_2(u(a_{12} - a_{22})) \neq 0$ , de sorte que la relation précédente peut s'écrire sous la forme

$$(4.7) \quad (\varphi_1(t))^2 = \varphi_1(t + u) \varphi_1(t - u) \theta(u).$$

Il en résulte, grâce à (3.1), que  $\varphi_1$  est la fonction caractéristique d'une loi normale.

A titre d'exemple, nous analyserons l'énoncé (4.1) dans deux *cas particuliers*.

a) Supposons d'abord

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire  $Y_1 = X_1$ ,  $Y_2 = X_1 + X_2$ . Si chacun des couples  $(X_1, X_2)$ ,  $(Y_1, Y_2)$  est formé de variables aléatoires indépendantes, le Théorème (4.1) permet d'affirmer que la variable aléatoire  $X_1$  est normale (en revanche, on ne peut rien affirmer sur  $X_2$ ). On peut d'ailleurs préciser que la variable aléatoire  $X_1$  est dégénérée. Il suffit pour cela de remarquer que, dans le cas présent, l'équation (4.6) se réduit à la forme (4.7) avec  $\theta(u) = 1$  (cf. (3.3)).

b) Supposons ensuite

$$A = \begin{pmatrix} \cos \omega & -\sin \omega \\ \sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire  $Y_1 = X_1 \cos \omega - X_2 \sin \omega$ ,  $Y_2 = X_1 \sin \omega + X_2 \cos \omega$ . Si chacun des couples  $(X_1, X_2)$ ,  $(Y_1, Y_2)$  est formé de variables aléatoires indépendantes, et si  $\omega$  n'est pas un multiple entier de  $\pi / 2$ , le Théorème (4.1) permet d'affirmer que chacune des variables aléatoires  $X_1, X_2$  est normale (en revanche, si  $\omega$  est un multiple entier de  $\pi / 2$ , on ne peut rien affirmer, ni sur  $X_1$  ni sur  $X_2$ ). On reconnaîtra ici un résultat ayant des analogies avec le Théorème (2.1).

Remarquons enfin que l'énoncé du théorème de Bernstein-Darmois tel qu'il figure dans [3] (pag. 77 et pag. 499) est incorrect. En effet il entraîne notamment que, dans les hypothèses du cas particulier a) ci-dessus, la variable aléatoire  $X_2$  est normale, ce qui est manifestement faux (il suffit, pour s'en convaincre, de prendre  $X_1$  constante et  $X_2$  non normale).

## 5. LE THÉORÈME DE SKITOVITCH-DARMOIS

Voici l'énoncé du théorème de Skitovitch-Darmois mentionné au paragraphe précédent:

(5.1) THÉORÈME. Soit  $X$  un vecteur aléatoire, à valeurs dans  $\mathbf{R}^n$ , dont les composantes  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes. Considérons les deux variables aléatoires  $Y_1, Y_2$  définies par les relations