Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 25 (1979)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR CERTAINES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES LIÉES A LA LOI NORMALE

Autor: Fuchs, Aimé / Letta, Giorgio

Kapitel: 4. Le théorème de Bernstein-Darmois

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-50371

(a) *μ est normale ;*

(b) *il existe un voisinage V de l'origine dans* $\mathbf{R}$ *et une application θ de V dans* $\mathbf{C}$ *telle que l'on ait*

$$(\varphi(t))^2 = \varphi(t+u)\,\varphi(t-u)\,\theta(u) \tag{3.2}$$

pour tout couple t, u d'éléments de V.

Démonstration. Il suffit de démontrer l'implication (b) $\Rightarrow$ (a). Supposons donc la propriété (b) vérifiée. Quitte à remplacer φ par $\varphi\bar{\varphi}$, on peut supposer φ réelle. L'équation (3.2) fournit alors, pour $t = 0$, $1 = (\varphi(u))^2\,\theta(u)$, de sorte qu'elle peut s'écrire sous la forme équivalente

$$(\varphi(t)\,\varphi(u))^2 = \varphi(t+u)\,\varphi(t-u)\,.$$

En particulier, pour $t = u = s/2$, on trouve $(\varphi(s/2))^4 = \varphi(s)$. La conclusion résulte alors du Théorème (1.2) pour $c = 4$.

(3.3) *Remarque.* Le cas d'une loi μ dégénérée correspond à celui où l'équation (3.2) est vérifiée avec une fonction θ identiquement égale à 1.

4. Le théorème de Bernstein-Darmois

Soit (X_1, X_2) un couple de variables aléatoires réelles, de même loi. Si le couple (X_1+X_2, X_1-X_2) est formé de variables aléatoires indépendantes, alors la loi commune de X_1 et de X_2 est normale: c'est le théorème de Bernstein-Darmois sous sa forme primitive. Il fut d'abord démontré par S. Bernstein [1] avec l'hypothèse que la loi commune de X_1 et de X_2 possède des moments finis jusqu'à l'ordre 4. Plus tard G. Darmois [2] réussit à généraliser ce résultat, tout en s'affranchissant de l'hypothèse concernant l'existence des moments. Il employa à cet effet une technique de différences finies, qui lui permit également de démontrer une généralisation ultérieure, bien plus profonde, connue sous le nom de théorème de Skitovitch-Darmois (cf. [6]).

Nous présentons ci-dessous le théorème de Bernstein-Darmois, que nous démontrons à l'aide de l'équation fonctionnelle du paragraphe 3.

(4.1) Théorème. *Soit X un vecteur aléatoire à valeurs dans* $\mathbf{R}^2$, *dont les composantes X_1, X_2 sont des variables aléatoires indépendantes. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice réelle* (2, 2), *et supposons que les composantes du* *vecteur aléatoire* $Y = AX$, *c'est-à-dire les deux variables aléatoires réelles* Y_1, Y_2 *définies par*

$$\begin{cases} Y_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 \\ Y_2 = a_{21}X_1 + a_{22}X_2 \end{cases},$$

soient elles aussi indépendantes. Alors, pour chaque indice i *tel que la i-ème colonne de* A *soit formée d'éléments non nuls, la loi de* X_i *est normale (éventuellement dégénérée).*

Pour rendre plus claire la démonstration, nous commencerons par démontrer un lemme préliminaire:

(4.2) LEMME. *Soit* X *un vecteur aléatoire à valeurs dans* $\mathbf{R}^2$, *de composantes* X_1, X_2, *et soit* Φ *sa fonction caractéristique. Les deux propriétés suivantes sont alors équivalentes :*

(a) (X_1, X_2) *est un couple de variables aléatoires indépendantes ;*

(b) *pour tout système de scalaires* s_1, s_2, u, v, *on a*

$$\Phi(s_1, s_2)\Phi(s_1+u, s_2+v) = \Phi(s_1+u, s_2)\Phi(s_1, s_2+v).$$

Démonstration du lemme.

Il suffit de démontrer (b) $\Rightarrow$ (a). Si l'on désigne par φ_i la fonction caractéristique de X_i, l'hypothèse (b) fournit (pour $s_1 = s_2 = 0$)

$$\Phi(u,v) = \Phi(u,0)\Phi(0,v) = \varphi_1(u)\varphi_2(v),$$

c'est-à-dire l'indépendance du couple (X_1, X_2).

Démonstration du théorème. Supposons, pour fixer les idées, que la première colonne de A soit formée d'éléments non nuls, et montrons que la loi de X_1 est normale. Quitte à multiplier chacune des lignes de A par un scalaire convenable, on pourra supposer

(4.3) $$a_{11} = a_{21} = 1.$$

1) Supposons d'abord que la matrice A soit singulière. En vertu de notre hypothèse on a alors $Y_1 = Y_2$. Par conséquent Y_1 est indépendante d'elle même, c'est-à-dire p.s. égale à une constante:

$$Y_1 = X_1 + a_{12}X_2 = c \quad \text{p.s.};$$

il en résulte

$$X_1 = c - a_{12}X_2 \quad \text{p.s.},$$

de sorte que X_1 est également indépendante d'elle même, c'est-à-dire p.s. égale à une constante.

2) Supposons maintenant que la matrice A ne soit pas singulière, et désignons par φ_i la fonction caractéristique de X_i et par Φ celle de X:

$$\Phi(t_1, t_2) = \varphi_1(t_1)\varphi_2(t_2) . \tag{4.4}$$

Désignons en outre par ψ la fonction caractéristique du vecteur aléatoire $Y = AX$, c'est-à-dire la fonction définie par

$$\psi(s_1, s_2) = \Phi(s_1 + s_2, s_1 a_{12} + s_2 a_{22}) . \tag{4.5}$$

En appliquant le lemme précédent au couple de variables aléatoires indépendantes (Y_1, Y_2), on trouve, pour tout système de scalaires s_1, s_2, u,

$$\psi(s_1, s_2)\psi(s_1 + u, s_2 - u) = \psi(s_1 + u, s_2)\psi(s_1, s_2 - u) .$$

Grâce à (4.5), cette relation s'écrit, en fonction de Φ,

$$\begin{aligned} &\Phi(s_1 + s_2, s_1 a_{12} + s_2 a_{22})\Phi(s_1 + s_2, s_1 a_{12} + s_2 a_{22} + u a_{12} - u a_{22}) \\ &= \Phi(s_1 + s_2 + u, s_1 a_{12} + s_2 a_{22} + u a_{12})\Phi(s_1 + s_2 - u, s_1 a_{12} + s_2 a_{22} - u a_{22}) . \end{aligned}$$

Etant donné le scalaire t, choisissons maintenant s_1, s_2 de façon à satisfaire aux conditions

$$\begin{cases} s_1 + s_2 = t \\ s_1 a_{12} + s_2 a_{22} = 0 \end{cases}$$

(ce qui est possible, car la matrice A n'est pas singulière). La relation précédente devient alors

$$\Phi(t, 0)\Phi\big(t, u(a_{12} - a_{22})\big) = \Phi(t + u, u a_{12})\Phi(t - u, -u a_{22}) ,$$

c'est-à-dire, grâce à (4.4),

$$\begin{aligned} &\varphi_1(t)\varphi_2(0)\varphi_1(t)\varphi_2\big(u(a_{12} - a_{22})\big) \\ &= \varphi_1(t + u)\varphi_2(u a_{12})\varphi_1(t - u)\varphi_2(-u a_{22}) . \end{aligned} \tag{4.6}$$

Or, si $|u|$ est assez petit, on a $\varphi_2\big(u(a_{12} - a_{22})\big) \neq 0$, de sorte que la relation précédente peut s'écrire sous la forme

$$(\varphi_1(t))^2 = \varphi_1(t + u)\varphi_1(t - u)\theta(u) . \tag{4.7}$$

Il en résulte, grâce à (3.1), que φ_1 est la fonction caractéristique d'une loi normale.

A titre d'exemple, nous analyserons l'énoncé (4.1) dans deux *cas particuliers.*

a) Supposons d'abord

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire $Y_1 = X_1$, $Y_2 = X_1 + X_2$. Si chacun des couples (X_1, X_2), (Y_1, Y_2) est formé de variables aléatoires indépendantes, le Théorème (4.1) permet d'affirmer que la variable aléatoire X_1 est normale (en revanche, on ne peut rien affirmer sur X_2). On peut d'ailleurs préciser que la variable aléatoire X_1 est dégénérée. Il suffit pour cela de remarquer que, dans le cas présent, l'équation (4.6) se réduit à la forme (4.7) avec $\theta(u) = 1$ (cf. (3.3)).

b) Supposons ensuite

$$A = \begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire $Y_1 = X_1 \cos\omega - X_2 \sin\omega$, $Y_2 = X_1 \sin\omega + X_2 \cos\omega$. Si chacun des couples (X_1, X_2), (Y_1, Y_2) est formé de variables aléatoires indépendantes, *et si* ω *n'est pas un multiple entier de* $\pi / 2$, le Théorème (4.1) permet d'affirmer que chacune des variables aléatoires X_1, X_2 est normale (en revanche, si ω est un multiple entier de $\pi / 2$, on ne peut rien affirmer, ni sur X_1 ni sur X_2). On reconnaîtra ici un résultat ayant des analogies avec le Théorème (2.1).

Remarquons enfin que l'énoncé du théorème de Bernstein-Darmois tel qu'il figure dans [3] (pag. 77 et pag. 499) est incorrect. En effet il entraîne notamment que, dans les hypothèses du cas particulier a) ci-dessus, la variable aléatoire X_2 est normale, ce qui est manifestement faux (il suffit, pour s'en convaincre, de prendre X_1 constante et X_2 non normale).

5. Le théorème de Skitovitch-Darmois

Voici l'énoncé du théorème de Skitovitch-Darmois mentionné au paragraphe précédent:

(5.1) Théorème. *Soit* X *un vecteur aléatoire, à valeurs dans* $\mathbf{R}^n$, *dont les composantes* $X_1, \ldots, X_n$ *sont indépendantes. Considérons les deux variables aléatoires* Y_1, Y_2 *définies par les relations*