

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 25 (1979)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** HALBGRUPPEN UND RESOLVENTEN IN DER POTENTIALTHEORIE  
**Autor:** Bauer, Heinz  
**Kapitel:** 4. Harmonische strukturen auf  $T^\infty$   
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-50369>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 10.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

und  $(\mu_t')_{t>0}$  auf den Gruppen  $G$  bzw.  $G'$  diese Eigenschaften besitzen. Schwierigkeiten bereitet die Eigenschaft (iii).

Wir werden aber selbst in einem relativ krassen Fall sehen, daß sich auch die Eigenschaft (iii) durch Zusatzbedingungen erhalten läßt. Es wird sich um den Fall eines unendlichen Produktes handeln.

#### 4. HARMONISCHE STRUKTUREN AUF $T^\infty$

Wir betrachten die Kreislinie  $T$ , also den eindimensionalen Torus. Auf der Charaktergruppe  $\hat{T} = \mathbf{Z}$  sind  $n \mapsto a n^2$  mit dem Normierungsfaktor  $a \geq 0$  sämtliche quadratische Formen. Jeder dieser quadratischen Formen entspricht gemäß (19) eine symmetrische Faltungshalbgruppe  $(\mu_{at})_{t>0}$  vom lokalen Typ auf  $T$ . Dabei hat  $\mu_{at}$  eine stetige Dichte bezüglich des Haar-Maßes  $\theta$  auf  $T$  (mit zu 1 normierter Gesamtmasse):

$$(20) \quad \mu_{at} = g_{at} \theta.$$

Diese Dichte ist für  $a = 1$  der Wärmekern

$$(21) \quad \begin{aligned} g_t(\theta) &= \sum_{k \in \mathbf{Z}} e^{-tn^2} e^{ik\theta} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-tn^2} \cos n\theta \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_{k \in \mathbf{Z}} \exp\left(-\frac{(\theta + 2\pi k)^2}{4t}\right). \end{aligned}$$

$(\mu_t)_{t>0}$  ist nichts anderes als die Faltungshalbgruppe der Brownschen Bewegung auf  $T$ .

Wir betrachten nun auf dem unendlich-dimensionalen Torus  $T^\infty = \prod_{k=1}^{\infty} T_k$ , wobei jedes  $T_k$  gleich  $T$  ist, für eine zunächst beliebig gegebene Folge  $\mathcal{A} = (a_k)_{k \in \mathbf{N}}$  reeller Zahlen  $a_k > 0$  die Faltungshalbgruppe  $(\mu_t^{\mathcal{A}})_{t>0}$  mit

$$(22) \quad \mu_t^{\mathcal{A}} = \bigotimes_{k=1}^{\infty} \mu_{a_k t}.$$

Auf der Charaktergruppe  $\hat{T}^\infty = \mathbf{Z}^{(\infty)}$ , d.h. auf der direkten Summe von abzählbar unendlich vielen Kopien von  $\mathbf{Z}$ , ergibt sich die Fourier-Transformierte von  $\mu_t^{\mathcal{A}}$  zu

$$(23) \quad \hat{\mu}_t^{\mathcal{A}}(n) = e^{-tq(n)}$$

mit  $q(n) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k n_k^2$ , wobei  $n \in \mathbb{Z}^{(\infty)}$  eine Folge  $(n_k)$  ganzer Zahlen ist, von denen höchstens endlich viele  $\neq 0$  sind.  $q$  ist eine stetige quadratische Form auf  $\mathbb{Z}^{(\infty)}$ . Daher ist  $(\mu_t^{\mathcal{A}})_{t>0}$  symmetrisch und vom lokalen Typ, also die Bedingung (i) des Forstschen Satzes erfüllt. Da  $T^{\infty}$  kompakt, also die konstante Funktion 1 kompakten Träger besitzt und stets  $\mu_t^{\mathcal{A}}(1) = 1$  gilt, liegt keine transiente Halbgruppe vor. Wir gehen daher für beliebiges  $\lambda > 0$  zur Faltungshalbgruppe  $(e^{-\lambda t} \mu_t^{\mathcal{A}})_{t>0}$  über, die (i) und (ii) erfüllt. Um (iii) erfüllen zu können, setzen wir

$$(24) \quad \rho_{\lambda}^{\mathcal{A}} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \mu_t^{\mathcal{A}} dt.$$

Nach einem bekannten Satz der harmonischen Analyse besitzt  $\mu_t^{\mathcal{A}}$  genau dann eine *stetige* Dichte  $g_t^{\mathcal{A}}$  bezüglich des Haar-Maßes  $\Theta$  von  $T^{\infty}$ , wenn

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^{(\infty)}} \hat{\mu}_t^{\mathcal{A}}(n) < +\infty.$$

Dies aber erweist sich als zu

$$(25) \quad \sum_{k=1}^{\infty} e^{-ta_k} < +\infty$$

äquivalent. Unter der Voraussetzung der Gültigkeit von (25) für jedes  $t > 0$  besitzt dann das Maß  $\rho_{\lambda}^{\mathcal{A}}$  die Dichte

$$(26) \quad \tilde{\rho}_{\lambda}^{\mathcal{A}} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} g_t^{\mathcal{A}} dt,$$

welche sich als nach unten halbstetig erweist. Stets ist  $\tilde{\rho}_{\lambda}^{\mathcal{A}}(0) = +\infty$ . Von BERG [5] wurde zunächst die Bedingung

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2^k}}{\sqrt{a_k}} < +\infty,$$

kurze Zeit darauf von FUGLEDE (unveröffentlicht)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a_k}} < +\infty$$

und schließlich 1977 erneut von BERG [6] die Bedingung

$$(27) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k} < +\infty$$

als hinreichend dafür erkannt, daß (25) für jedes  $t > 0$  gilt und  $\rho_\lambda^{\mathcal{A}}$  für jedes  $\lambda > 0$  in  $T^\infty \setminus \{0\}$  stetig und reell ist. Auf diese Weise erhielt BERG [5], [6] den Satz:

4.1 Erfüllt eine Folge  $\mathcal{A} = (a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  positiver reeller Zahlen die Bedingung (27), so existiert auf  $T^\infty$  für jedes  $\lambda > 0$  ein translationsinvariantes, symmetrisches Garbendatum  $\mathcal{H}_\lambda^{\mathcal{A}}$ , für welches  $(T^\infty, \mathcal{H}_\lambda^{\mathcal{A}})$  ein strenger Brelot-Raum und  $\tilde{\rho}_\lambda^{\mathcal{A}}$  ein strikt positives, in  $T^\infty \setminus \{0\}$  harmonisches Potential ist.

Damit hat man mittels Produktbildung eine ganze Schar harmonischer Strukturen  $\mathcal{H}_\lambda^{\mathcal{A}}$  auf dem unendlich-dimensionalen Torus konstruiert. Jede dieser Strukturen kann durch den linearen „Differentialoperator“

$$(28) \quad L_\lambda^{\mathcal{A}} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\partial^2}{\partial \theta_k^2} - \lambda \cdot id$$

beschrieben werden. Bezeichnet nämlich  $\pi_p: T^\infty \rightarrow T^p$  die kanonische Projektion von  $T^\infty$  auf den  $p$ -dimensionalen Torus  $T^p$  der ersten  $p = 1, 2, \dots$  Koordinaten, so liegen alle Funktionen  $f \circ \pi_p$  mit  $f \in C^2(T^p)$  im Definitionsbereich des infinitesimalen Erzeugers  $L_\lambda^{\mathcal{A}}$  von  $(\mu_t^{\mathcal{A}})_{t>0}$  und es gilt

$$L_\lambda^{\mathcal{A}} (f \circ \pi_p) = \sum_{k=1}^p a_k \frac{\partial^2 f}{\partial \theta_k^2} - \lambda f.$$

Mit distributionstheoretischen Methoden kann man, ausgehend von (28), das Garbendatum  $\mathcal{H}_\lambda^{\mathcal{A}}$  direkt beschreiben: Es bezeichne hierzu  $\mathcal{D}(\Omega)$  für offenes  $\Omega \subset T^\infty$  die Menge aller Funktionen  $f \circ \pi_p$  mit  $p \in \mathbb{N}$  und  $f \in C^\infty(T^p)$ , deren Träger in  $\Omega$  enthalten ist. Dann gilt

$$\mathcal{H}_\lambda^{\mathcal{A}}(\Omega) = \{ h \in C(\Omega) : \int_{T^p} h L_\lambda^{\mathcal{A}} g d\theta = 0 \text{ für alle } g \in \mathcal{D}(\Omega) \}.$$

Dabei kann man sogar  $\lambda = 0$  zulassen. Allerdings ist der dann entstehende Brelot-Raum nicht mehr streng. Dieser Zugang findet sich ebenfalls bei BERG [5]. Analoge Resultate wurden von BENDIKOV [4] mit Methoden der Theorie der Markov-Prozesse erzielt.

## 5. BEZIEHUNGEN ZUR DIFFERENTIATIONSTHEORIE

Über die Theorie der harmonischen Räume hinaus werden der Potentialtheorie durch die Betrachtung von Halbgruppen von Kernen neue Dimensionen eröffnet. Dies soll nun noch kurz skizziert werden.