Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 25 (1979)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: HALBGRUPPEN UND RESOLVENTEN IN DER POTENTIALTHEORIE
Autor: Bauer, Heinz
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-50369

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 18.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

HALBGRUPPEN UND RESOLVENTEN IN DER POTENTIALTHEORIE [1]

von Heinz BAUER

Der Vortrag verfolgte das Ziel, an Hand einiger neuer Resultate der Potentialtheorie die zunehmend deutlicher werdende zentrale Rolle von Halbgruppen und Resolventen in dieser Theorie aufzuzeigen. Der Verfasser hofft, damit auch einen Beitrag zu einer Standortbestimmung der Potentialtheorie zu liefern.

1. EIN BLICK AUF DIE KLASSISCHE THEORIE

Klassische Potentialtheorie heißt einerseits (lokaler Aspekt) das Studium der *Laplaceschen Differentialgleichung*

$$\Delta h = 0 \tag{1}$$

im $\mathbf{R}^n$, wobei wir uns auf den Fall $n \geqslant 3$ beschränken, und andererseits (globaler Aspekt) das Studium der *Newtonschen Kernfunktion*

$$N(x) = \frac{1}{|x|^{n-2}} \quad (x \in \mathbf{R}^n). \text{ [2]} \tag{2}$$

Aus ihr leiten sich die global definierten *Potentiale* p ab. Dies sind alle Funktionen $p: \mathbf{R}^n \to [0, +\infty]$, welche nicht konstant gleich $+\infty$ sind und eine (notwendigerweise eindeutige) Darstellung

$$p = N * \mu \tag{3}$$

besitzen, wobei μ ein positives Radon-Maß auf $\mathbf{R}^n$ ist. Eine nicht-negative Funktion $u: \mathbf{R}^n \to [0, +\infty]$ heißt *hyperharmonisch* (auf $\mathbf{R}^n$), wenn sie von der Form

$$u = N * \mu + h$$

---

[1]) Ausarbeitung eines am 10. April 1978 an der ETH Zürich im Rahmen des International Symposium on Analysis gehaltenen Vortrages. Dieser Artikel wurde bereits in *Contributions to Analysis*, Monographie de l'*Ens. Math.* N° 27, Genève 1979, veröffentlicht.

[2]) $|x|$ bezeichnet die euklidische Norm des Vektors $x \in \mathbf{R}^n$.

ist, wobei jetzt μ ein beliebiges Radon-Maß $\geqslant 0$ auf $\mathbf{R}^n$ und h eine positive harmonische Funktion auf $\mathbf{R}^n$, also eine (in diesem Fall konstante) Lösung $h \geqslant 0$ von (1) ist. Diese hyperharmonischen Funktionen $u \geqslant 0$ können als nach unten halbstetige Funktionen durch die übliche Mittelwerteigenschaft (Rieszscher Zerlegungssatz) oder durch die Gültigkeit von $\Delta u \leqslant 0$ im distributions-theoretischen Sinne gekennzeichnet werden.

Klassische Potentialtheorie muß aber auch unter dem Aspekt des Studiums der Brownschen Halbgruppe gesehen werden. Dieser (ebenfalls globale) Aspekt tritt historisch gesehen erst viel später in Erscheinung, nämlich durch die bahnbrechenden Arbeiten von KAKUTANI [21], [22]. Die *Brownsche Halbgruppe* (oder die Halbgruppe der Brownschen Bewegung) ist dabei die Faltungshalbgruppe $(\nu_t)_{t>0}$ der Wahrscheinlichkeitsmaße

$$\nu_t = g_t \lambda^n, \tag{4}$$

wobei λ^n das n-dimensionale Lebesgue-Maß und g_t die Dichte

$$g_t(x) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right) \tag{5}$$

ist. Wie üblich interpretieren wir ν_t als einen Kern, d.h. als den durch Faltung wirkenden Operator P_t:

$$P_t f = \nu_t * f.$$

Dieser operiert auf den beschränkten sowie auf den nicht-negativen Borel-meßbaren Funktionen linear und positiv. Somit erscheint die Faltungshalbgruppe $(\nu_t)_{t>0}$ als eine Halbgruppe $(P_t)_{t>0}$ von Kernen.

Bezüglich einer solchen Halbgruppe heißt eine nicht-negative Funktion $u\colon \mathbf{R}^n \to [0, +\infty]$ *exzessiv*, wenn sie Borel-meßbar ist und der Bedingung

$$\sup_{t>0} P_t u = u \tag{6}$$

genügt. Die potentialtheoretische Bedeutung dieser Halbgruppe wird deutlich durch den fundamentalen Satz von DOOB [15] und HUNT [20]:

1.1. *Die exzessiven Funktionen bezüglich der Brownschen Halbgruppe fallen mit den nicht-negativen hyperharmonischen Funktionen zusammen.*

Der analytische Grund für diesen Zusammenhang ist die Gleichheit

$$\int_0^\infty g_t(x)\,dt = c_n N(x) \qquad (x \in \mathbf{R}^n) \tag{7}$$

mit dem positiven Faktor

$$c_n = \frac{1}{4\pi^{n/2}} \Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right).$$

Der sich durch Integration der Halbgruppe $(P_t)_{t>0}$ ergebende Kern

$$V = \int_0^\infty P_t \, dt \tag{8}$$

ist somit nichts anderes als der durch Faltung mit Hilfe des Maßes

$$\kappa = c_n N \lambda^n \tag{9}$$

wirkende Kern $Vf = \kappa * f$.

Damit sind es die drei Objekte Δ, N und $(P_t)_{t>0}$, die im Mittelpunkt der klassischen Potentialtheorie stehen. Jedes dieser Objekte erlaubt die Definition der (global definierten) hyperharmonischen Funktionen $\geqslant 0$. Aus der Kenntnis eines dieser Objekte folgt die der anderen, denn N ist die Fundamentallösung von (1), interpretiert als der zu κ gehörige Faltungskern V, berechnet sich N gemäß (8) aus $(P_t)_{t>0}$, ferner ist Δ der infinitesimale Erzeuger von $(P_t)_{t>0}$, d.h. es gilt

$$\Delta f = \lim_{t \to 0} \frac{P_t f - f}{t} \tag{10}$$

für alle Funktionen $f \in C^2(\mathbf{R}^n)$ mit kompakten Träger. Hierzu vergleiche man Berg-Forst [7].

Der Satz 1.1 ist der Schlüssel zum wahrscheinlichkeitstheoretischen Verständnis potentialtheoretischer Begriffsbildungen. Hierauf soll aber hier nicht eingegangen werden. (Vgl. jedoch [2].)

2. Harmonische Räume und fellersche Halbgruppen

Die weiteren Teile des Vortrages werden vor allem durch die Frage nach dem Zusammenhang zwischen lokaler Potentialtheorie und Halbgruppen von Kernen motiviert.

Als lokale Potentialtheorie verstehen wir dabei die Theorie der harmonischen Räume, die sich aus der Idee entwickelt hat, die Theorie der Laplace-Gleichung (1) auf allgemeinere elliptische und parabolische Differentialgleichungen etwa mit einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit als Grundraum zu entwickeln. (Vgl. hierzu [1], Brelot [10], [11], [12] und Constantinescu-Cornea [13].)

Der Einfachheit halber sollen hier harmonische Räume nur im Sinne von BRELOT [10] verstanden werden. Es sei demnach X ein lokal-kompakter, (Hausdorff-) Raum und $\mathscr{H}$ ein Garbendatum von Vektorräumen stetiger reeller Funktionen. $(X,\mathscr{H})$ heißt dann ein *Brelot-Raum*, wenn X keine isolierten Punkte besitzt und lokal-zusammenhängend ist, eine Basis regulärer Mengen existiert (per definitionem ist für diese das Dirichletsche Problem für alle stetigen Randwerte eindeutig und „positiv" lösbar) und das Brelotsche Konvergenzaxiom erfüllt ist. Wir werden nur *strenge* oder $\mathfrak{P}$-Brelot-Räume betrachten, also solche mit mindestens einem Potential $p \neq 0$. Die Definition dieser Begriffsbildungen findet man in [10], [11] und [1]. Für $n \geqslant 3$ liefert das Garbendatum $\mathscr{H}_\Delta$ der Lösungen von (1), also der klassischen harmonischen Lösungen, den strengen Brelot-Raum $(\mathbf{R}^n, \mathscr{H}_\Delta)$.

Ausgelöst durch die Untersuchung Markovscher Prozesse haben sich in zunehmendem Maße spezielle Halbgruppen von Kernen als wichtig erwiesen. Auf einem lokal-kompakten Raum X mit abzählbarer Basis sei $(P_t)_{t>0}$ eine Halbgruppe von *Kernen*. Jedes P_t ist also eine Funktion auf $X \times \mathfrak{B}_X$, wobei $\mathfrak{B}_X$ die σ-Algebra der Borelschen Mengen bezeichnet; für jedes $A_0 \in \mathfrak{B}_X$ bzw. $x_0 \in X$ werden dabei die Abbildungen $A \mapsto P_t(x_0, A)$ bzw. $x \mapsto P_t(x, A_0)$ als nicht-negative Maße auf $\mathfrak{B}_X$ bzw. als (nicht-negative) Borel-meßbare Funktionen vorausgesetzt. Durch Integration nach der zweiten Variablen wirkt jedes P_t als linearer Operator auf geeigneten Räumen meßbarer Funktionen:

$$P_t f(x) = \int P_t(x, dy)\, f(y) \tag{11}$$

(z.B. für Borel-meßbares $f \geqslant 0$). Die Halbgruppeneigenschaft besagt nichts anderes als

$$P_{s+t} f = P_s P_t f \tag{12}$$

für alle Borel-meßbaren Funktionen $f \geqslant 0$ und für alle $s, t > 0$ oder — äquivalent hierzu —

$$P_{s+t}(x, A) = \int P_s(x, dy)\, P_t(y, A) \tag{13}$$

für alle $x \in X$ und $A \in \mathfrak{B}_X$. Es müssen also die sogenannten Chapman-Kolmogorov-Gleichungen erfüllt sein.[1])

Eine solche Halbgruppe von Kernen heißt *Fellersch*, wenn jeder Kern P_t sub-Markovsch, also $P_t 1 \leqslant 1$ erfüllt ist, wenn P_t den Raum $C_0(X)$ der im Unendlichen verschwindenden, stetigen, reellen Funktionen auf X in sich abbildet, und wenn außerdem

[1]) Vgl. hierzu [3] und MEYER [24].

$$\lim_{t \to 0} P_t f = f \qquad \textit{für alle } f \in C_0(X)$$

im Sinne der gleichmäßigen Konvergenz erfüllt ist. Einer solchen Fellerschen Halbgruppe sind wir in der klassischen Theorie bereits begegnet: die Brownsche Halbgruppe ist Fellersch. Jeder der Kerne P_t ist dort sogar Markovsch, erfüllt also $P_t 1 = 1$.

Eines der Leitmotive für die Entwicklung der Theorie der harmonischen Räume war, über Jahre hinweg, die Frage nach der Existenz einer Halbgruppe von Kernen auf einem streng harmonischen Raum $(X, \mathscr{H})$ derart, daß, wie in der klassischen Theorie, die exzessiven Funktionen mit den hyperharmonischen Funktionen $\geqslant 0$ auf X übereinstimmen. Hyperharmonisch heissen dabei die durch die Mittelwerteigenschaft (für reguläre Mengen) definierten nach unten halbstetigen Funktionen. Die Antwort auf diese Frage ist Ja. Sie wurde durch MEYER [23] für Brelotsche und später durch BOBOC-CONSTANTINESCU-CORNEA [9] und HANSEN [18], [19] für allgemeinere Typen harmonischer Räume gegeben:

2.1. *Auf einem streng harmonischen Raum* $(X, \mathscr{H})$ *existieren stets ein strikt positives, stetiges, reelles Potential* q *und eine Fellersche Halbgruppe* $(Q_t)_{t>0}$ *derart, dass deren exzessive Funktionen mit den mit* $\frac{1}{q}$ *multiplizierten nicht-negativen hyperharmonischen Funktionen übereinstimmen.*

Ist die konstante Funktion 1 *hyperharmonisch, so fallen die nicht-negativen hyperharmonischen Funktionen mit den exzessiven Funktionen der neuen Halbgruppe*

$$P_t f = q\, Q_t\left(\frac{1}{q} f\right) \qquad (f \in C_0(X)) \tag{14}$$

zusammen.

Man nennt die Halbgruppe $(P_t)_{t>0}$ auf Grund ihrer Herkunft auch *quasi-Fellersch.*

3. DER SATZ VON G. FORST

Im Gegensatz zu der dem Resultat 2.1 zugrunde liegenden Fragestellung ist die umgekehrte Frage nach Eigenschaften einer Halbgruppe $(P_t)_{t>0}$ von Kernen auf einem Raum X, welche die Existenz eines Garbendatums $\mathscr{H}$ garantieren, so daß $(X, \mathscr{H})$ ein harmonischer Raum und die exzessiven Funktionen von $(P_t)_{t>0}$ mit den hyperharmonischen Funktionen $\geqslant 0$ zusammenfallen, neueren Datums. Es sind nur Teilantworten bekannt.

Jede Teilantwort ist aber von Interesse, da sie erhoffen läßt, dem Problem der Produktbildung harmonischer Räume näher zu treten.

Sind nämlich $(P_t)_{t>0}$ und $(P'_t)_{t>0}$ Halbgruppen von Kernen auf lokalkompakten Räumen X bzw. X', so liefert die Bildung der Produktmaße

$$Q_t((x, x'), .) = P_t(x, .) \otimes P'_t(x', .)$$

eine Halbgruppe $(Q_t)_{t>0}$ von Kernen auf $X \times X'$. Sind $(P_t)_{t>0}$ und $(P'_t)_{t>0}$ im Sinne von Satz 2.1 mit harmonischen Strukturen $\mathscr{H}$ auf X bzw. $\mathscr{H}'$ auf X' verknüpft und läßt sich mit Hilfe allgemeiner Sätze entscheiden, ob auch $(Q_t)_{t>0}$ zu einer harmonischen Struktur gehört, so liegt es nahe, diese als ein Produkt der harmonischen Räume $(X, \mathscr{H})$ und $(X', \mathscr{H}')$ zu interpretieren. Zu diesem Problem sind gerade in letzter Zeit Resultate von U. SCHIRMEIER [28] erzielt worden. Hier geht es uns nur um den Hinweis auf die grundsätzliche Bedeutung dieser Fragestellung: Wir werden sehen, daß sie selbst unter stark einschränkenden Zusatzannahmen zu neuen, überraschenden Beispielen harmonischer Räume führt.

Es werde jetzt nämlich vorausgesetzt, daß der lokal-kompakte Grundraum eine lokal-kompakte abelsche Gruppe G mit abzählbarer Basis ist; ferner sei die gegebene Halbgruppe $(P_t)_{t>0}$ Fellersch und translationsinvariant, also

$$P_t(f \circ \tau_{-a}) = \tau_a(P_t f)$$

für jede Translation $\tau_a(x) = x + a$ erfüllt ($t > 0$, f Borel-meßbar $\geqslant 0$). Diese und allein diese Halbgruppen rühren von Faltungshalbgruppen $(\mu_t)_{t>0}$ von positiven Radon-Maßen auf G her, d.h. es gilt

$$P_t f = \mu_t * f. \tag{15}$$

Faltungshalbgruppe heiße dabei, daß neben

$$\mu_{s+t} = \mu_s * \mu_t \qquad \textit{für } s, t > 0 \tag{16}$$

die Bedingungen

$$\mu_t(G) \leqslant 1 \qquad (t > 0) \tag{17}$$

und

$$\lim_{t \to 0} \mu_t = \varepsilon_0 \tag{18}$$

(in der vagen Topologie) erfüllt sind.[1])

[1]) ε_0 bezeichnet die Einheitsmasse in 0. Zu diesem und den folgenden Resultaten über Faltungshalbgruppen vom lokalen Typ vergleiche man BERG-FORST [7].

Eine solche Faltungshalbgruppe heißt vom *lokalen Typ*, wenn für ihren infinitesimalen Erzeuger A mit Definitionsbereich $D_A \subset C_0(G)$ gilt: ist $f \in D_A$ Null in der Umgebung eines Punktes $x \in G$, so ist f an der Stelle x gleich Null. Im Fall einer *symmetrischen* Halbgruppe, wo also jedes der Maße μ_t bei der Spiegelung $x \mapsto -x$ in sich übergeht, ist dies äquivalent zum folgenden Verhalten der Fourier-Transformierten $\hat{\mu}_t$ von μ_t: es gibt eine stetige quadratische Form q auf der Charaktergruppe $\hat{G}$ und eine Konstante $c \geqslant 0$ mit

$$\hat{\mu}_t = e^{-t(c+q)} \quad \textit{für alle } t > 0. \tag{19}$$

Eine wichtige Beantwortung der zu Beginn dieses Abschnittes gestellten Frage gibt der folgende Satz von FORST [17]:

3.1. *Sei G eine nicht diskrete, lokal-kompakte abelsche Gruppe mit abzählbarer Basis. Ferner sei $(\mu_t)_{t>0}$ eine Faltungshalbgruppe von Massen mit folgenden Eigenschaften:*

(i) *(μ_t) ist symmetrisch und vom lokalen Typ;*

(ii) *die Halbgruppe ist transient, d.h. es existiert das Integral*

$$\kappa(f) = \int_0^\infty \mu_t(f)\,dt$$

für jede Funktion $f \in C_0(G)$ mit kompaktem Träger;

(iii) *bezüglich des Haarschen Masses Θ von G besitzt das Mass κ eine nach unten halbstetige Dichte N, welche auf $G \setminus \{0\}$ stetig und reell ist.*

Dann existiert ein translationsinvariantes, symmetrisches Garbendatum $\mathscr{H}$ auf G derart, dass $(G, \mathscr{H})$ ein strenger Brelot-Raum und N ein in $G \setminus \{0\}$ harmonisches Potential ist.

Aus einem Resultat von BLIEDTNER [8] folgt ferner

3.2. *Die nicht-negativen hyperharmonischen Funktionen auf G fallen mit den exzessiven Funktionen der gegebenen Faltungshalbgruppe zusammen.*

Speziell ordnet sich die klassische Potentialtheorie in das Ergebnis von FORST ein.

Kehren wir nun nochmals zu der eingangs erhobenen Frage nach der Bildung von Produkten harmonischer Räume zurück. Man sieht sofort, daß die Produkthalbgruppe $(\mu_t \otimes \mu_t')_{t>0}$ auf $G \times G'$ die Eigenschaften (i) und (ii) besitzt, wenn zwei vorgegebene Faltungshalbgruppen $(\mu_t)_{t>0}$

und $(\mu_t')_{t>0}$ auf den Gruppen G bzw. G' diese Eigenschaften besitzen. Schwierigkeiten bereitet die Eigenschaft (iii).

Wir werden aber selbst in einem relativ krassen Fall sehen, daß sich auch die Eigenschaft (iii) durch Zusatzbedingungen erhalten läßt. Es wird sich um den Fall eines unendlichen Produktes handeln.

4. Harmonische Strukturen auf T^∞

Wir betrachten die Kreislinie T, also den eindimensionalen Torus. Auf der Charaktergruppe $\hat{T} = \mathbf{Z}$ sind $n \mapsto a\,n^2$ mit dem Normierungsfaktor $a \geqslant 0$ sämtliche quadratische Formen. Jeder dieser quadratischen Formen entspricht gemäß (19) eine symmetrische Faltungshalbgruppe $(\mu_{at})_{t>0}$ vom lokalen Typ auf T. Dabei hat μ_{at} eine stetige Dichte bezüglich des Haar-Maßes θ auf T (mit zu 1 normierter Gesamtmasse):

$$\mu_{at} = g_{at}\,\theta\,. \tag{20}$$

Diese Dichte ist für $a = 1$ der Wärmekern

$$\begin{aligned} g_t(\theta) &= \sum_{k\in\mathbf{Z}} e^{-tn^2} e^{ik\theta} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-tn^2} \cos n\theta \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_{k\in\mathbf{Z}} \exp\left(-\frac{(\theta+2\pi k)^2}{4t}\right)\,. \end{aligned} \tag{21}$$

$(\mu_t)_{t>0}$ ist nichts anderes als die Faltungshalbgruppe der Brownschen Bewegung auf T.

Wir betrachten nun auf dem unendlich-dimensionalen Torus $T^\infty = \prod_{k=1}^{\infty} T_k$, wobei jedes T_k gleich T ist, für eine zunächst beliebig gegebene Folge $\mathscr{A} = (a_k)_{k\in\mathbf{N}}$ reeller Zahlen $a_k > 0$ die Faltungshalbgruppe $(\mu_t^{\mathscr{A}})_{t>0}$ mit

$$\mu_t^{\mathscr{A}} = \bigotimes_{k=1}^{\infty} \mu_{a_k t}\,. \tag{22}$$

Auf der Charaktergruppe $\hat{T}^\infty = \mathbf{Z}^{(\infty)}$, d.h. auf der direkten Summe von abzählbar unendlich vielen Kopien von $\mathbf{Z}$, ergibt sich die Fourier-Transformierte von $\mu_t^{\mathscr{A}}$ zu

$$\hat{\mu}_t^{\mathscr{A}}(n) = e^{-tq(n)} \tag{23}$$

mit $q(n) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k n_k^2$, wobei $n \in \mathbf{Z}^{(\infty)}$ eine Folge (n_k) ganzer Zahlen ist, von denen höchstens endlich viele $\neq 0$ sind. q ist eine stetige quadratische Form auf $\mathbf{Z}^{(\infty)}$. Daher ist $(\mu_t^{\mathscr{A}})_{t>0}$ symmetrisch und vom lokalen Typ, also die Bedingung (i) des Forstschen Satzes erfüllt. Da T^∞ kompakt, also die konstante Funktion 1 kompakten Träger besitzt und stets $\mu_t^{\mathscr{A}}(1) = 1$ gilt, liegt keine transiente Halbgruppe vor. Wir gehen daher für beliebiges $\lambda > 0$ zur Faltungshalbgruppe $(e^{-\lambda t} \mu_t^{\mathscr{A}})_{t>0}$ über, die (i) und (ii) erfüllt. Um (iii) erfüllen zu können, setzen wir

$$\rho_\lambda^{\mathscr{A}} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \mu_t^{\mathscr{A}} \, dt \, . \tag{24}$$

Nach einem bekannten Satz der harmonischen Analyse besitzt $\mu_t^{\mathscr{A}}$ genau dann eine *stetige* Dichte $g_t^{\mathscr{A}}$ bezüglich des Haar-Maßes Θ von T^∞, wenn

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}^{(\infty)}} \hat{\mu}_t^{\mathscr{A}}(n) < +\infty \, .$$

Dies aber erweist sich als zu

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-t a_k} < +\infty \tag{25}$$

äquivalent. Unter der Voraussetzung der Gültigkeit von (25) für jedes $t > 0$ besitzt dann das Maß $\rho_\lambda^{\mathscr{A}}$ die Dichte

$$\tilde{\rho}_\lambda^{\mathscr{A}} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} g_t^{\mathscr{A}} \, dt \, , \tag{26}$$

welche sich als nach unten halbstetig erweist. Stets ist $\tilde{\rho}_\lambda^{\mathscr{A}}(0) = +\infty$. Von Berg [5] wurde zunächst die Bedingung

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2^k}}{\sqrt{a_k}} < +\infty \, ,$$

kurze Zeit darauf von Fuglede (unveröffentlicht)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a_k}} < +\infty$$

und schließlich 1977 erneut von Berg [6] die Bedingung

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k} < +\infty \tag{27}$$

als hinreichend dafür erkannt, daß (25) für jedes $t > 0$ gilt und $\rho_\lambda^{\mathscr{A}}$ für jedes $\lambda > 0$ in $T^\infty \backslash \{0\}$ stetig und reell ist. Auf diese Weise erhielt BERG [5], [6] den Satz:

4.1 *Erfüllt eine Folge* $\mathscr{A} = (a_k)_{k \in \mathbf{N}}$ *positiver reeller Zahlen die Bedingung (27), so existiert auf* T^∞ *für jedes* $\lambda > 0$ *ein translationsinvariantes, symmetrisches Garbendatum* $\mathscr{H}_\lambda^{\mathscr{A}}$, *für welches* $(T^\infty, \mathscr{H}_\lambda^{\mathscr{A}})$ *ein strenger Brelot-Raum und* $\tilde{\rho}_\lambda^{\mathscr{A}}$ *ein strikt positives, in* $T^\infty \backslash \{0\}$ *harmonisches Potential ist.*

Damit hat man mittels Produktbildung eine ganze Schar harmonischer Strukturen $\mathscr{H}_\lambda^{\mathscr{A}}$ auf dem unendlich-dimensionalen Torus konstruiert. Jede dieser Strukturen kann durch den linearen „*Differentialoperator*"

$$L_\lambda^{\mathscr{A}} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\partial^2}{\partial \theta_k^2} - \lambda \cdot id \tag{28}$$

beschrieben werden. Bezeichnet nämlich $\pi_p : T^\infty \to T^p$ die kanonische Projektion von T^∞ auf den p-dimensionalen Torus T^p der ersten $p = 1,2,\ldots$ Koordinaten, so liegen alle Funktionen $f \circ \pi_p$ mit $f \in C^2(T^p)$ im Definitionsbereich des infinitesimalen Erzeugers $L_\lambda^{\mathscr{A}}$ von $(\mu_t^{\mathscr{A}})_{t>0}$ und es gilt

$$L_\lambda^{\mathscr{A}} (f \circ \pi_p) = \sum_{k=1}^{p} a_k \frac{\partial^2 f}{\partial \theta_k^2} - \lambda f .$$

Mit distributionstheoretischen Methoden kann man, ausgehend von (28), das Garbendatum $\mathscr{H}_\lambda^{\mathscr{A}}$ direkt beschreiben: Es bezeichne hierzu $\mathscr{D}(\Omega)$ für offenes $\Omega \subset T^\infty$ die Menge aller Funktionen $f \circ \pi_p$ mit $p \in \mathbf{N}$ und $f \in C^\infty(T^p)$, deren Träger in Ω enthalten ist. Dann gilt

$$\mathscr{H}_\lambda^{\mathscr{A}}(\Omega) = \{ h \in C(\Omega) : \int_{T^p} h L_\lambda^{\mathscr{A}} g \, d\theta = 0 \quad \textit{für alle } g \in \mathscr{D}(\Omega) \} .$$

Dabei kann man sogar $\lambda = 0$ zulassen. Allerdings ist der dann entstehende Brelot-Raum nicht mehr streng. Dieser Zugang findet sich ebenfalls bei BERG [5]. Analoge Resultate wurden von BENDIKOV [4] mit Methoden der Theorie der Markov-Prozesse erzielt.

5. BEZIEHUNGEN ZUR DIFFERENTIATIONSTHEORIE

Über die Theorie der harmonischen Räume hinaus werden der Potentialtheorie durch die Betrachtung von Halbgruppen von Kernen neue Dimensionen eröffnet. Dies soll nun noch kurz skizziert werden.

Eine der einfachsten Faltungshalbgruppen auf $\mathbf{R}$ ist die Halbgruppe $(\varepsilon_{-t})_{t>0}$ der Einheitsmassen in $-t$. Die zugehörigen Kerne P_t operieren wie folgt

$$P_t f(x) = f(x+t).$$

Der durch Integration entstehende (Potential-) Kern V hat also die Gestalt

$$Vf(x) = \int_0^\infty P_t f(x)\, dt = \int_x^\infty f(t)\, dt.$$

Die *supermedian* genannten Funktionen bezüglich einer Halbgruppe $(P_t)_{t>0}$, d.h. diejenigen Borel-meßbaren Funktionen $f \geqslant 0$ mit

$$P_t f \leqslant f \qquad \textit{für alle } t > 0,$$

sind im Falle dieser speziellen Halbgruppe gerade die monoton fallenden Funktionen $f \geqslant 0$ auf $\mathbf{R}$. Für Lebesgue-integrierbares f auf $\mathbf{R}$ ist Vf absolut stetig und $\lim\limits_{x\to+\infty} Vf(x) = 0$. Setzen wir noch

$$D_t f = \frac{f - P_t f}{t} \qquad (t > 0)$$

und

$$Df = \limsup_{t\to 0} D_t f,$$

so erhält man aus den klassischen Differentiationssätzen der Lebesgueschen Theorie:

1. Für jede supermediane Funktion u existiert der *reelle* Limes

(29) $$Du = \lim_{t\to 0} D_t u \qquad \textit{fast überall.}$$

2. Für jede Borel-meßbare Funktion $f \geqslant 0$ auf $\mathbf{R}$ mit $Vf(x) < +\infty$ für alle $x \in \mathbf{R}$ gilt

(30) $$DVf = f \qquad \textit{fast überall.}$$

Setzt man schließlich noch

$$D^* u = \sup_{t>0} D_t u,$$

so besagt das Maximallemma von HARDY-LITTLEWOOD:

3. Für jede supermediane Funktion u gilt

(31) $$V1_{\{D^*u \geqq \alpha\}} \leqslant \frac{u(x)}{\alpha} \qquad (\alpha > 0)\,.$$

Dabei bezeichnet 1_A die Indikatorfunktion einer Menge A; die linke Seite der Ungleichung (31) ist das Lebesgue-Maß der Menge

$$\{ y \in \mathbf{R} : D^* u(y) \geqslant \alpha \} \cap [x, +\infty[.$$

„Fast überall" heißt stets bis auf eine Borel-Menge A vom Lebesgue-Maß Null. Hiermit äquivalent ist aber die Forderung

$$V 1_A(x) = 0 \qquad \textit{für alle } x \in \mathbf{R}. \tag{32}$$

Interpretiert man in den Aussagen 1 und 2 fast überall im Sinne von (32), so bekommen die Aussagen 1—3 einen Sinn für beliebige Halbgruppen $(P_t)_{t>0}$ von Kernen auf einem Meßraum.

Es ist höchst bemerkenswert, daß die Aussagen 1—3 nahezu ohne Zusatzbedingungen für *sub-Markovsche* Halbgruppen $(P_t)_{t>0}$ auf einem Meßraum von MOKOBODZKI [25], [26] bewiesen werden konnten. Man muß eigentlich nur voraussetzen, daß die σ-Algebra des Meßraumes von den exzessiven Funktionen der Halbgruppe erzeugt wird. Dies ist in unserem eingangs gewählten Beispiel der Fall.

6. AUSBLICK: RESOLVENTEN IN DER POTENTIALTHEORIE

Häufig — ein typisches Beispiel hierfür ist der Beweis des Satzes 2.1 — gelangt man zu einer Halbgruppe $(P_t)_{t>0}$ von Kernen nur auf dem Umweg über deren *Resolvente* $(V_\lambda)_{\lambda>0}$, wobei V_λ den Kern,

$$V_\lambda = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t \, dt, \tag{33}$$

also die Laplace-Transformierte von $(P_t)_{t>0}$ bezeichnet. Es ist der Satz von Hille-Yosida, der von einer Resolvente, d.h. genauer von einer der Resolventengleichung

$$V_\lambda - V_\mu + (\lambda - \mu) V_\lambda V_\mu = 0 \qquad (\lambda, \mu > 0) \tag{34}$$

genügenden Familie $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ von Kernen zu einer zugehörigen, unter geeigneten Zusatzvoraussetzungen eindeutig bestimmten Halbgruppe $(P_t)_{t>0}$ von Kernen führt. (Vgl. MEYER [24].)

Außerdem ist es selbst bei gegebener Halbgruppe $(P_t)_{t>0}$ oft nur auf dem Umweg über die Resolvente möglich, gewisse Eigenschaften nachzuweisen. Ist beispielsweise $(P_t)_{t>0}$ eine Fellersche Halbgruppe auf einem lokal-kompakten Raum X mit abzählbarer Basis, so läßt sich die Exzessivi-

tät einer Borel-meßbaren Funktion $u \geqslant 0$ auf X durch die zur Definition äquivalente Bedingung

$$\sup_{\lambda > 0} \lambda V_\lambda u = u \tag{35}$$

für die Resolvente nachweisen.

Dies hat zur Folge, daß der explizite Gebrauch der Halbgruppe oft unnötig und Sätze gleich in der Sprache der Resolventen formuliert und bewiesen werden können. Häufig wird hierdurch größere Allgemeinheit erzielt, nämlich dann, wenn keine zugehörige Halbgruppe existiert. Ein Beispiel sind die Sätze von MOKOBODZKI des letzten Abschnitts, welche in [25], [26] gleich in der Sprache der Resolventen formuliert werden. Auch die Untersuchungen von CORNEA-LICEA [14] sind in diesem Licht zu sehen.

Resolventen treten auch bei *hyperbolischen* linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung auf — allerdings muß man dabei auf die Positivität der Kerne verzichten. RITTER [27] (vgl. auch [16]) hat nämlich gezeigt, daß für große Klassen solcher Differentialgleichungen der durch die Fundamentallösung definierte Kern in eine Resolvente reeller Kerne aufgelöst werden kann. Hierdurch dürfte es möglich werden, potentialtheoretische Methoden auch in das Gebiet der hyperbolischen Differentialgleichungen eindringen zu lassen. Das Gebiet der parabolischen Differentialgleichungen wurde potentialtheoretischen Methoden bereits durch den allgemeinen Begriff des harmonischen Raumes erschlossen (vgl. [1] und [13]).

LITERATUR

[1] BAUER, H. *Harmonische Räume und ihre Potentialtheorie.* Lecture Notes in Math. 22, Springer-Verlag (1966).

[2] —— Aspects of modern potential theory. *Proc. Intern. Congress of Math., Vancouver 1974*, pp. 327-337 (1975).

[3] —— *Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Masstheorie. 3. Aufl.* Verlag W. de Gruyter, Berlin (1978).

[4] BENDIKOV, A. D. On functions that are harmonic for a certain class of diffusion processes on a group. *Theory Probability Appl. 20* (4), pp. 759-769 (1975).

[5] BERG, C. Potential theory on the infinite dimensional torus. *Inventiones math. 32* (1976), pp. 49-100.

[6] —— On Brownian and Poissonian convolution semigroups on the infinite dimensional torus. *Inventiones math. 38* (1977), pp. 227-235.

[7] BERG, C. and G. FORST. *Potential theory on locally compact abelian groups.* Ergebnisse der Math. 87, Springer-Verlag (1975).

[8] BLIEDTNER, J. Harmonische Gruppen und Huntsche Faltungskerne (in Seminar über Potentialtheorie). *Lecture Notes in Math. 69*, p.p. 69-102, Springer-Verlag (1968).

[9] BOBOC, N., C. CONSTANTINESCU and A. CORNEA. Semigroups of transitions on harmonic spaces. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 12* (1967), pp. 763-805.

[10] BRELOT, M. *Lectures on potential theory.* Tata Inst. of Fund. Research, Bombay (1960).

[11] —— *Axiomatique des fonctions harmoniques.* Les Presses de l'Université de Montréal (1966).

[12] —— Les étapes et les aspects multiples de la théorie du potentiel. *L'Enseignement Math. 18* (1972), pp. 1-36.

[13] CONSTANTINESCU, C. and A. CORNEA. *Potential theory on harmonic spaces.* Grundlehren der Math. 158, Springer-Verlag (1972).

[14] CORNEA, A. and G. LICEA. *Order and potential, resolvent families of kernels.* Lecture Notes in Math. 494, Springer-Verlag (1975).

[15] DOOB, J. L. Semimartingales and subharmonic functions. *Trans. Amer. Math. Soc. 77* (1954), pp. 86-121.

[16] EDWARDS, R. E., E. HEWITT and G. RITTER. Fourier multipliers for certain spaces of functions with compact supports. *Inventiones math. 40* (1977), pp. 37-57.

[17] FORST, G. Symmetric harmonic groups and translation invariant Dirichlet spaces. *Inventiones math. 18* (1972), pp. 143-182.

[18] HANSEN, W. Konstruktion von Halbgruppen und Markoffschen Prozessen. *Inventiones math. 3* (1967), pp. 179-214.

[19] —— Hunt's theorem and axiomatic potential theory. *Inventiones math. 14* (1971), pp. 242-252.

[20] HUNT, G. A. Markoff processes and potentials I. *Illinois J. Math. 1* (1957), pp. 44-93.

[21] KAKUTANI, S. Two-dimensional Brownian motion and harmonic functions. *Proc. Imp. Acad. Tokyo 20* (1944), pp. 706-714.

[22] —— Markov processes and the Dirichlet problem. *Proc. Imp. Acad. Tokyo 21* (1945), pp. 227-233.

[23] MEYER, P. A. Brelot's axiomatic potential theory of the Dirichlet problem and Hunt's theory. *Ann. Inst. Fourier 13, fasc. 2* (1963), pp. 357-372.

[24] —— *Probabilités et potentiels.* Hermann, Paris (1966).

[25] MOKOBODZKI, G. Densité relative de deux potentiels comparables (in: Séminaire de Probabilités IV). *Lectures Notes in Math. 124*, pp. 170-194, Springer-Verlag (1970).

[26] —— Quelques propriétés remarquables des opérateurs positifs (in Séminaire de Probabilités IV). *Lecture Notes in Math. 124*, pp. 195-207, Springer-Verlag (1970).

[27] RITTER, G. Konstruktion von Operatoren und Kernen mit Hilfe von Absorptionsmengen. *Math. Ann. 216* (1975), pp. 51-66.

[28] SCHIRMEIER, U. Produkte harmonischer Räume. *Sitz. Ber. math. nat. Kl. Bayer. Akad. Wiss. 1978* (1979), pp. 5-22.

(Reçu le 3 octobre 1978)

Heinz Bauer

Mathematisches Institut
der Universität Erlangen-Nürnberg
Bismarckstr. 1 1/2
D-8520 Erlangen
Bundesrepublik Deutschland