

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 25 (1979)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LES OUVERTS AFFINES D'UN SCHÉMA AFFINE  
**Autor:** Arezzo, Domenico / Ramella, Luciana  
**Kapitel:** 3. Propriété () et ouverts affines  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-50386>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 25.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

### 3. PROPRIÉTÉ $(\beta)$ ET OUVERTS AFFINES

Dans cette section nous démontrons une condition suffisante pour caractériser les ouverts affines d'un schéma affine noethérien  $X$  comme les complémentaires des parties fermées de codimension pure 1.  $(\beta)$  désignant la propriété que tout idéal premier de hauteur 1 soit le radical d'un idéal principal, la condition est que l'anneau intègre  $D$  ait localement la propriété  $(\beta)$ . Cette dernière hypothèse coïncide avec la semi-factorialité locale si  $D$  est un anneau de Krull (prop. 3.4.), mais elle est en général plus faible, comme le montre la remarque 3.11., qui donne un exemple d'une classe d'anneaux ayant la propriété  $(\beta)$  mais non la propriété  $S_2$ . Le travail se termine par un exemple d'un anneau ayant les propriétés  $(\beta)$  et  $S_2$ , mais non intégralement clos (ex. 3.12).

**DÉFINITION 3.1.** On dit que  $D$  a la propriété  $(\alpha)$  (respect.  $(\beta)$ ) si tout idéal premier de hauteur 1 de  $D$  a une puissance symbolique principale (respect. est le radical d'un idéal principal).

Si  $D$  est un anneau de Krull, la propriété  $(\alpha)$  coïncide avec la semi-factorialité; si  $D$  est noethérien, la propriété  $(\beta)$  coïncide avec la propriété  $C_2FD$  étudié par E. Stagnaro dans [11].

**REMARQUE 3.2.** Si  $D$  a un seul idéal premier de hauteur 1  $\mathfrak{p}$ , par exemple si  $D$  est un anneau de valuation ou un anneau intègre quasi-local de dimension 1, et si  $0 \neq x \in \mathfrak{p}$ , on a  $\sqrt{(x)} = \mathfrak{p}$ , et ainsi  $D$  a la propriété  $(\beta)$ .

**LEMME 3.3.** Si  $D$  est noethérien,  $D$  a la propriété  $(\beta)$  si et seulement si le radical de tout idéal pseudopur de hauteur 1 est le radical d'un idéal principal.

*Preuve.* Soient  $\alpha$  un idéal pseudopur de hauteur 1 et  $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$  ses idéaux premiers minimaux; alors, pour tout  $i = 1, \dots, n$ , il existe  $c_i \in D$  avec  $\mathfrak{p}_i = \sqrt{(c_i)}$  et ainsi, si  $c = \prod_{i=1}^n c_i$ , on a  $\sqrt{\alpha} = \sqrt{(c)}$ .

Il est clair que la propriété  $(\alpha)$  entraîne la propriété  $(\beta)$ , mais l'inverse est en général faux. En effet, si  $B = k[X, Y]/(X^2 - Y^3) = k[x, y]$  et  $D = B_{(x, y)}$ ,  $D$  a la propriété  $(\beta)$ , d'après la remarque 3.2., mais on voit facilement qu'il n'a pas la propriété  $(\alpha)$ . Toutefois le fait suivant est bien connu.

PROPOSITION 3.4. Dans un anneau de Krull  $D$ , la propriété  $(\alpha)$  est équivalente à la propriété  $(\beta)$ .

*Preuve.* Soit  $\mathfrak{p}$  un idéal premier de hauteur 1 de  $D$  et soit  $\mathfrak{p} = \sqrt{(c)}$ . Comme  $D_{\mathfrak{p}}$  est un DVR, il existe  $n \in \mathbb{N}$  avec  $cD_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}^n D_{\mathfrak{p}}$ . On voit alors facilement que l'on a  $\mathfrak{p}^{(n)} = (c)$ .

On a alors:  $D$  factoriel  $\Rightarrow D$  semi-factoriel  $\Rightarrow D$  a la propriété  $(\alpha)$   $\Rightarrow D$  a la propriété  $(\beta)$ ; il est bien connu (cfr. par exemple [11]) que si  $D$  est un anneau du type  $\mathbb{C}[X, Y]/\mathfrak{p}$  ayant la propriété  $(\beta)$ , il est factoriel.

PROPOSITION 3.5. Si  $D$  a la propriété  $(\beta)$  et si  $S$  est une partie multiplicative de  $D$ , alors  $D_S$  a la propriété  $(\beta)$ .

*Preuve.* Tout idéal premier de hauteur 1 de  $D_S$  est du type  $\mathfrak{p}D_S$  avec  $\mathfrak{p}$  idéal premier de hauteur 1 de  $D$ . Si  $\mathfrak{p} = \sqrt{(c)}$ , on a  $\mathfrak{p}D_S = \sqrt{cD_S}$ .

COROLLAIRE 3.6. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- a)  $D_{\mathfrak{p}}$  a la propriété  $(\beta)$  pour tout idéal premier  $\mathfrak{p}$ ;
- b)  $D_{\mathfrak{m}}$  a la propriété  $(\beta)$  pour tout idéal maximal  $\mathfrak{m}$ .

DÉFINITION 3.7. On dit que  $D$  a localement la propriété  $(\beta)$  (ou qu'il est localement  $(\beta)$ ) si, pour tout idéal maximal  $\mathfrak{m}$  de  $D$ ,  $D_{\mathfrak{m}}$  a la propriété  $(\beta)$ .

Il résulte de la définition et de la prop. 3.5. que si  $D$  a la propriété  $(\beta)$  il l'a aussi localement. L'inverse, toutefois, est faux en général, comme il est montré par le suivant

EXEMPLE 3.8. Soit  $D = \mathbb{C}[X, Y]/(X^2 - Y^3)$ ; alors  $D$  est localement  $(\beta)$ , puisque il a dimension 1, mais il n'est pas factoriel, et par suite il n'a pas la propriété  $(\beta)$ .

Dans ce qui suit, nous supposons que  $D$  soit noethérien et que soit  $X = \text{Spec } D$ .

Il est clair que si  $\alpha$  est un idéal de  $D$  et  $F$  est le fermé de  $X$  défini par  $\alpha$ , alors  $\sqrt{\alpha}$  est le radical d'un idéal principal si et seulement si  $X - F$  est un ouvert affine principal, et  $\sqrt{\alpha}$  est localement radical d'idéaux principaux si et seulement si l'ouvert  $X - F$  est localement principal, auquel cas

$X - F$  est affine. Il peut toutefois y avoir des ouverts affines non localement principaux. Si par exemple  $X$  est le cône affine projetant la cubique elliptique plane projective sur  $\mathbb{C}$ ,  $\Gamma$ , si  $P$  est un point de  $\Gamma$  dont aucun multiple n'est intersection complète et si  $F$  est la droite qui projette  $P$ , il est bien connu que  $X - F$  est un ouvert affine non localement principal.

Le sens géométrique des propriétés «  $(\beta)$  » et « localement  $(\beta)$  » est clarifié par les remarques suivantes :

- a)  $D$  a la propriété  $(\beta)$  si et seulement si les ouverts de  $X$  définis par idéaux pseudopurs de hauteur 1 sont exactement les idéaux principaux ;
- b)  $D$  est localement  $(\beta)$  si et seulement si les ouverts de  $X$  définis par les idéaux pseudopurs de hauteur 1 sont exactement les ouverts localement principaux.

**PROPOSITION 3.9.** *Soient  $D$  un anneau intègre localement  $(\beta)$ ,  $\mathfrak{a}$  un idéal de  $D$  et considérons les conditions*

- a) *le fermé  $V(\mathfrak{a})$  est pur de codimension 1 ;*
- b) *l'ouvert  $U_{\mathfrak{a}}$  est localement principal ;*
- c) *l'ouvert  $U_{\mathfrak{a}}$  est affine.*

*On a alors  $a) \Leftrightarrow b) \Rightarrow c)$ . En outre, si la clôture intégrale  $D^*$  de  $D$  est noethérienne, les trois conditions sont équivalentes.*

*Preuve.* L'équivalence des deux premières conditions est claire, et il résulte du coroll. 2.8. que  $b) \Rightarrow c)$ . Si  $D^*$  est noethérien et  $U_{\mathfrak{a}}$  est affine, on a, d'après le théor. 2.6.,  $\mathfrak{a}T(\mathfrak{a}) = T(\mathfrak{a})$ , ce qui entraîne (prop. 2.11.) que  $\mathfrak{a}$  est pseudopur de hauteur 1. Donc  $c) \Rightarrow a)$ .

La proposition 3.9. généralise la prop. 2. de [2], qui affirme que si  $D$  est localement semi-factoriel, les ouverts affines de  $X$  sont exactement les complémentaires des fermés de codimension pure 1. En effet, comme nous avons vu, la condition « localement semi-factoriel » est plus forte de notre « localement  $(\beta)$  ». Des exemples d'anneaux intègres non localement semi-factoriels mais localement  $(\beta)$  sont tous les anneaux intègres de dimension 1 non intégralement clos ; mais on a aussi des classes d'exemples en dimension plus haute ; pour le voir, démontrons la

**PROPOSITION 3.10.** *Soit  $D$  un anneau intègre dont la clôture intégrale  $D^*$  est localement  $(\beta)$ . Supposons en outre que*

- a) le conducteur  $m_o$  de  $D$  dans  $D^*$  soit un idéal maximal de hauteur  $\geq 2$  dans  $D$ ;
- b) il existe un seul idéal maximal  $m_o^*$  de  $D^*$  au-dessus de  $m_o$ ;
- c) il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $(\sqrt[n]{m_o^*})^n \subseteq D$  (toujours vrai si  $D^*$  est noethérien). Alors  $D$  est localement  $(\beta)$ .

*Preuve.* Remarquons en premier lieu que les hypothèses indiquées entraînent la bijectivité de l'application canonique de  $\text{Spec } D^*$  en  $\text{Spec } D$ .

Or, si  $m$  est un idéal maximal de  $D$  et  $m^*$  est le seul idéal maximal de  $D^*$  au-dessus de  $m$ , on a  $D_{m^*}^* = D_m^*$  (cfr. [3], ch. V, § 2, prop. 2); en outre, si  $m \neq m_o$ , on a  $D_m = D_{m^*}^*$ , donc  $D_m$  a la propriété  $(\beta)$ .

Soient donc  $m = m_o$ ,  $p$  un idéal premier de hauteur 1 de  $D$  contenu dans  $m$  et  $p^*$  le seul idéal premier de  $D^*$  (nécessairement de hauteur 1) tel que  $p^* \cap D = p$ . Alors on a  $\sqrt{p} D_m^* = p^* D_m^*$ ; mais  $D_m^* = D_{m^*}^*$  a la propriété  $(\beta)$ , donc il existe  $f \in p^*$  tel que  $p^* D_m^* = \sqrt{f} D_m^*$ . L'hypothèse c) entraîne que  $f^n \in D$ . Montrons que  $p D_m = \sqrt{f^n} D_m$  en montrant que  $p D_m$  est l'unique idéal premier de hauteur 1 de  $D_m$  contenant  $f^n$ .

En effet, si  $q D_m$  est un autre idéal premier de hauteur 1 de  $D_m$  contenant  $f^n$  et si  $q^*$  est le seul idéal premier de  $D^*$  au-dessus de  $q$ , on a  $f^n \in q^*$ ; donc  $f \in q^*$ ,  $p^* D_m^* = \sqrt{f} D_m^* \subseteq q^* D_m^*$  et  $q D_m^* \neq D_m^*$ , puisque  $q \subseteq m$  et ainsi  $q^* \subseteq m^*$ . Alors, comme  $h(p^* D_m^*) = h(q^* D_m^*)$ , on a  $q^* D_m^* = p^* D_m^*$ ; donc  $q^* = p^*$  et  $q = p$ .

**REMARQUE 3.11.** Si  $D$  est un anneau intègre noethérien vérifiant les conditions de la proposition précédente,  $D$  a la propriété  $R_1$ ; en effet, si  $p$  est un idéal premier de hauteur 1 de  $D$  et  $p^*$  est le seul idéal premier de  $D^*$  au-dessus de  $p$ , on a  $D_p = D_{p^*}^*$  et ce dernier anneau est un  $DVR$ , puisque  $D^*$  est un anneau de Krull. On en déduit que, si  $D$  n'est pas intégralement clos,  $D$  n'est pas  $S_2$ ; donc tout anneau intègre local non intégralement clos vérifiant les conditions de la prop. 3.10. constitue un exemple d'anneau intègre ayant la propriété  $(\beta)$  mais non  $S_2$ , ce qui répond négativement à une question posée par E. Stagnaro dans [11].

**EXEMPLE 3.12.** Soit  $D = k[X, XY, Y^2, Y^3]$ ; alors la clôture intégrale de  $D$  est  $D^* = k[X, Y]$ , et le conducteur de  $D$  en  $D^*$  est  $m_o = (X, XY, Y^2, Y^3) D = (X, Y^2) D^*$ . Alors le seul idéal maximal

de  $D^*$  au-dessus de  $m_o$  est  $(X, Y) D^*$  et  $(\sqrt[m_o]{D^*})^2 = ((X, Y) D^*)^2 \subseteq D$ ; donc, d'après la prop. 3.10.,  $D$  est localement  $(\beta)$ , mais il n'est pas  $S_2$ .

EXEMPLE 3.13. L'anneau  $B = \mathbf{R}[X, Y]/(X^2 + Y^2)$  vérifie les conditions du corollaire 4.7. de [12], et ainsi l'anneau intègre  $D = B[[T]]$  a les propriétés  $(\beta)$  et  $S_2$ , mais il n'est pas intégralement clos.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] BASTIDA, E. and R. GILMER. Overrings and divisorial ideals of rings of the form  $D + M$ . *Mich. Math. J.* 20 (1973), pp 79-87.
- [2] BELTRAMETTI, M. e F. ODETTI. Semifattorialità e aperti affini. *Ann. Univ. Ferrara* 23 (1977), pp. 11-16.
- [3] BOURBAKI, N. *Algèbre Commutative*. Ch. 5 et 6, Paris, Hermann, 1964.
- [4] GILMER, R. and J. HUCKABA. The transform formula for ideals. *J. Algebra* 21 (1972), pp. 191-215.
- [5] GROTHENDIECK, A. et J. DIEUDONNÉ. *Eléments de Géométrie Algébrique. I*. Berlin-Heidelberg-New York, Springer 1971.
- [6] ——— *Eléments de Géométrie Algébrique, Ch. IV, 4<sup>e</sup> partie*. Publ. Math. I.H.E.S. N° 32, Paris, 1967.
- [7] HARTSHORNE, R. Cohomological dimension of algebraic varieties. *Ann. of Math.* 88 (1968), pp. 401-450.
- [8] NAGATA, M. A treatise on the 14-th problem of Hilbert. *Mem. of the College of Science, Univ. of Kyoto*, 30 (1956), pp. 57-70.
- [9] ——— A theorem on finite generation of a ring. *Nagoya Math. J.* 27 (1966), pp. 193-205.
- [10] RAMELLA, L. On the Nagata transform of an ideal. *Rend. Sem. Mat. Univ. e Politec. Torino (à paraître)*.
- [11] STAGNARO, E. Su alcune generalizzazioni della nozione di dominio fattoriale. *Ann. Univ. Ferrara* 29 (1974), pp. 157-179.
- [12] TAMONE, G. Su una condizione di fattorialità debole e l'annullamento del gruppo di Picard. *Ann. di Matem.* 112 (1974), pp. 285-304.

(Reçu le 4 décembre 1978)

Domenico Arezzo  
Luciana Ramella

Istituto di Matematica  
via L. B. Alberti 4  
16132 GENOVA (Italie)