Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 25 (1979)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES OUVERTS AFFINES D'UN SCHÉMA AFFINE

Autor: Arezzo, Domenico / Ramella, Luciana

Kapitel: 3. Propriété () et ouverts affines

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-50386

3. Propriété (β) et ouverts affines

Dans cette section nous démontrons une condition suffisante pour caractériser les ouverts affines d'un schéma affine noethérien X comme les complémentaires des parties fermées de codimension pure 1. (β) désignant la propriété que tout idéal premier de hauteur 1 soit le radical d'un idéal principal, la condition est que l'anneau intègre D ait localement la propriété (β). Cette dernière hypothèse coïncide avec la semi-factorialité locale si D est un anneau de Krull (prop. 3.4.), mais elle est en général plus faible, comme le montre la remarque 3.11., qui donne un exemple d'une classe d'anneaux ayant la propriété (β) mais non la propriété S_2. Le travail se termine par un exemple d'un anneau ayant les propriétés (β) et S_2, mais non intégralement clos (ex. 3.12).

Définition 3.1. On dit que D a la propriété (α) (respect. (β)) si tout idéal premier de hauteur 1 de D a une puissance symbolique principale (respect. est le radical d'un idéal principal).

Si D est un anneau de Krull, la propriété (α) coïncide avec la semi-factorialité; si D est noethérien, la propriété (β) coïncide avec la propriété C_2FD étudié par E. Stagnaro dans [11].

Remarque 3.2. Si D a un seul idéal premier de hauteur 1 $\mathfrak{p}$, par exemple si D est un anneau de valuation ou un anneau intègre quasi-local de dimension 1, et si $0 \neq x \in \mathfrak{p}$, on a $\sqrt{(x)} = \mathfrak{p}$, et ainsi D a la propriété (β).

Lemme 3.3. *Si D est noethérien, D a la propriété (β) si et seulement si le radical de tout idéal pseudopur de hauteur* 1 *est le radical d'un idéal principal.*

Preuve. Soient $\mathfrak{a}$ un idéal pseudopur de hauteur 1 et $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ ses idéaux premiers minimaux; alors, pour tout $i = 1, \ldots, n$, il existe $c_i \in D$ avec $\mathfrak{p}_i = \sqrt{(c_i)}$ et ainsi, si $c = \prod_{i=1}^{n} c_i$, on a $\sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{(c)}$.

Il est clair que la propriété (α) entraîne la propriété (β), mais l'inverse est en général faux. En effet, si $B = k\,[X, Y]/(X^2 - Y^3) = k\,[x, y]$ et $D = B_{(x,y)}$, D a la propriété (β), d'après la remarque 3.2., mais on voit facilement qu'il n'a pas la propriété (α). Toutefois le fait suivant est bien connu.

Proposition 3.4. *Dans un anneau de Krull D, la propriété (α) est équivalent à la propriété (β).*

Preuve. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de hauteur 1 de D et soit $\mathfrak{p} = \sqrt{(c)}$. Comme $D_{\mathfrak{p}}$ est un DVR, il existe $n \in \mathbf{N}$ avec $cD_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}^n D_{\mathfrak{p}}$. On voit alors facilement que l'on a $\mathfrak{p}^{(n)} = (c)$.

On a alors: D factoriel $\Rightarrow D$ semi-factoriel $\Rightarrow D$ a la propriété (α) $\Rightarrow D$ a la propriété (β); il est bien connu (cfr. par exemple [11]) que si D est un anneau du type $\mathbf{C}[X, Y]/\mathfrak{p}$ ayant la propriété (β), il est factoriel.

Proposition 3.5. *Si D a la propriété (β) et si S est une partie multiplicative de D, alors D_s a la propriété (β).*

Preuve. Tout idéal premier de hauteur 1 de D_s est du type $\mathfrak{p}D_s$ avec $\mathfrak{p}$ idéal premier de hauteur 1 de D. Si $\mathfrak{p} = \sqrt{(c)}$, on a $\mathfrak{p}D_s = \sqrt{cD_s}$.

Corollaire 3.6. *Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

a) *$D_{\mathfrak{p}}$ a la propriété (β) pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$;*

b) *$D_{\mathfrak{m}}$ a la propriété (β) pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$.*

Définition 3.7. On dit que D a *localement* la propriété (β) (ou qu'il *est localement* (β)) si, pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de D, $D_{\mathfrak{m}}$ a la propriété (β).

Il résulte de la définition et de la prop. 3.5. que si D a la propriété (β) il l'a aussi localement. L'inverse, toutefois, est faux en général, comme il est montré par le suivant

Exemple 3.8. Soit $D = \mathbf{C}[X, Y]/(X^2 - Y^3)$; alors D est localement (β), puisque il a dimension 1, mais il n'est pas factoriel, et par suite il n'a pas la propriété (β).

Dans ce qui suit, nous supposerons que D soit noethérien et que soit $X = \operatorname{Spec} D$.

Il est clair que si $\mathfrak{a}$ est un idéal de D et F est le fermé de X défini par $\mathfrak{a}$, alors $\sqrt{\mathfrak{a}}$ est le radical d'un idéal principal si et seulement si $X - F$ est un ouvert affine principal, et $\sqrt{\mathfrak{a}}$ est localement radical d'idéaux principaux si et seulement si l'ouvert $X - F$ est localement principal, auquel cas

$X - F$ est affine. Il peut toutefois y avoir des ouverts affines non localement principaux. Si par exemple X est le cône affine projetant la cubique elliptique plane projective sur $\mathbf{C}$, Γ, si P est un point de Γ dont aucun multiple n'est intersection complète et si F est la droite qui projette P, il est bien connu que $X - F$ est un ouvert affine non localement principal.

Le sens géométrique des propriétés « (β) » et « localement (β) » est clarifié par les remarques suivantes:

a) D a la propriété (β) si et seulement si les ouverts de X définis par idéaux pseudopurs de hauteur 1 sont exactement les idéaux principaux;

b) D est localement (β) si et seulement si les ouverts de X définis par les idéaux pseudopurs de hauteur 1 sont exactement les ouverts localement principaux.

Proposition 3.9. *Soient D un anneau intègre localement (β), $\mathfrak{a}$ un idéal de D et considérons les conditions*

a) *le fermé $V(\mathfrak{a})$ est pur de codimension* 1;

b) *l'ouvert $U_{\mathfrak{a}}$ est localement principal;*

c) *l'ouvert $U_{\mathfrak{a}}$ est affine.*

On a alors a) $\Leftrightarrow$ b) $\Rightarrow$ c). *En outre, si la clôture intégrale D^* de D est noethérienne, les trois conditions sont équivalentes.*

Preuve. L'équivalence des deux premières conditions est claire, et il résulte du coroll. 2.8. que b) $\Rightarrow$ c). Si D^* est noethérien et $U_{\mathfrak{a}}$ est affine, on a, d'après le théor. 2.6., $\mathfrak{a}T(\mathfrak{a}) = T(\mathfrak{a})$, ce qui entraîne (prop. 2.11.) que $\mathfrak{a}$ est pseudopur de hauteur 1. Donc c) $\Rightarrow$ a).

La proposition 3.9. généralise la prop. 2. de [2], qui affirme que si D est localement semi-factoriel, les ouverts affines de X sont exactement les complémentaires des fermés de codimension pure 1. En effet, comme nous avons vu, la condition « localement semi-factoriel » est plus forte de notre « localement (β) ». Des exemples d'anneaux intègres non localement semi-factoriels mais localement (β) sont tous les anneaux intègres de dimension 1 non intégralement clos; mais on a aussi des classes d'exemples en dimension plus haute; pour le voir, démontrons la

Proposition 3.10. *Soit D un anneau intègre dont la clôture intégrale D^* est localement (β). Supposons en outre que*

a) *le conducteur* $\mathfrak{m}_o$ *de* D *dans* D^* *soit un idéal maximal de hauteur* $\geqslant 2$ *dans* D;

b) *il existe un seul idéal maximal* $\mathfrak{m}_o^*$ *de* D^* *au-dessus de* $\mathfrak{m}_o$;

c) *il existe* $n \in \mathbf{N}$ *tel que* $(\sqrt[D^*]{\mathfrak{m}_o})^n \subseteq D$ *(toujours vrai si* D^* *est noethérien). Alors* D *est localement* (β).

Preuve. Remarquons en premier lieu que les hypothèses indiquées entraînent la bijectivité de l'application canonique de Spec D^* en Spec D.

Or, si $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal de D et $\mathfrak{m}^*$ est le seul idéal maximal de D^* au-dessus de $\mathfrak{m}$, on a $D^*_{\mathfrak{m}^*} = D^*_{\mathfrak{m}}$ (cfr. [3], ch. V, § 2, prop. 2); en outre, si $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}_o$, on a $D_{\mathfrak{m}} = D^*_{\mathfrak{m}^*}$, donc $D_{\mathfrak{m}}$ a la propriété (β).

Soient donc $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_o$, $\mathfrak{p}$ un idéal premier de hauteur 1 de D contenu dans $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{p}^*$ le seul idéal premier de D^* (nécessairement de hauteur 1) tel que $\mathfrak{p}^* \cap D = \mathfrak{p}$. Alors on a $\sqrt{\mathfrak{p} D^*_{\mathfrak{m}}} = \mathfrak{p}^* D^*$; mais $D^*_{\mathfrak{m}} = D^*_{\mathfrak{m}^*}$ a la propriété (β), donc il existe $f \in \mathfrak{p}^*$ tel que $\mathfrak{p}^* D^*_{\mathfrak{m}} = \sqrt{f D^*}$. L'hypothèse c) entraîne que $f^n \in D$. Montrons que $\mathfrak{p} D_{\mathfrak{m}} = \sqrt{f^n D_{\mathfrak{m}}}$ en montrant que $\mathfrak{p} D_{\mathfrak{m}}$ est l'unique idéal premier de hauteur 1 de $D_{\mathfrak{m}}$ contenant f^n.

En effet, si $\mathfrak{q}\, D_{\mathfrak{m}}$ est un autre idéal premier de hauteur 1 de $D_{\mathfrak{m}}$ contenant f^n et si $\mathfrak{q}^*$ est le seul idéal premier de D^* au-dessus de $\mathfrak{q}$, on a $f^n \in \mathfrak{q}^*$; donc $f \in \mathfrak{q}^*$, $\mathfrak{p}^* D^*_{\mathfrak{m}} = \sqrt{f D^*_{\mathfrak{m}}} \subseteq \mathfrak{q}^* D^*$ et $\mathfrak{q}\, D^*_{\mathfrak{m}} \neq D^*_{\mathfrak{m}}$, puisque $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{m}$ et ainsi $\mathfrak{q}^* \subseteq \mathfrak{m}^*$. Alors, comme $h(\mathfrak{p}^* D^*_{\mathfrak{m}}) = h(\mathfrak{q}^* D^*_{\mathfrak{m}})$, on a $\mathfrak{q}^* D^*_{\mathfrak{m}} = \mathfrak{p}^* D^*_{\mathfrak{m}}$; donc $\mathfrak{q}^* = \mathfrak{p}^*$ et $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$.

Remarque 3.11. Si D est un anneau intègre noethérien vérifiant les conditions de la proposition précédente, D a la propriété R_1; en effet, si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de hauteur 1 de D et $\mathfrak{p}^*$ est le seul idéal premier de D^* au-dessus de $\mathfrak{p}$, on a $D_{\mathfrak{p}} = D^*_{\mathfrak{p}^*}$ et ce dernier anneau est un *DVR*, puisque D^* est un anneau de Krull. On en déduit que, si D n'est pas intégralement clos, D n'est pas S_2; donc tout anneau intègre local non intégralement clos vérifiant les conditions de la prop. 3.10. constitue un exemple d'anneau intègre ayant la propriété (β) mais non S_2, ce qui répond négativement à une question posée par E. Stagnaro dans [11].

Exemple 3.12. Soit $D = k[X, XY, Y^2, Y^3]$; alors la clôture intégrale de D est $D^* = k[X, Y]$, et le conducteur de D en D^* est $\mathfrak{m}_o = (X, XY, Y^2, Y^3)\, D = (X, Y^2)\, D^*$. Alors le seul idéal maximal de D^* au-dessus de $\mathfrak{m}_o$ est $(X, Y)\,D^*$ et $(\sqrt[D^*]{\mathfrak{m}_o})^2 = ((X, Y)\,D^*)^2 \subseteq D$; donc, d'après la prop. 3.10., D est localement (β), mais il n'est pas S_2.

Exemple 3.13. L'anneau $B = \mathbf{R}\,[X, Y]/(X^2 + Y^2)$ vérifie les conditions du corollaire 4.7. de [12], et ainsi l'anneau intègre $D = B\,[\![T]\!]$ a les propriétés (β) et S_2, mais il n'est pas intégralement clos.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bastida, E. and R. Gilmer. Overrings and divisorial ideals of rings of the form D + M. *Mich. Math. J. 20* (1973), pp 79-87.
[2] Beltrametti, M. e F. Odetti. Semifattorialità e aperti affini. *Ann. Univ. Ferrara 23* (1977), pp. 11-16.
[3] Bourbaki, N. *Algèbre Commutative*. Ch. 5 et 6, Paris, Hermann, 1964.
[4] Gilmer, R. and J. Huckaba. The transform formula for ideals. *J. Algebra 21* (1972), pp. 191-215.
[5] Grothendiek, A. et J. Dieudonné. *Eléments de Géométrie Algébrique. I.* Berlin-Heidelberg-New York, Springer 1971.
[6] —— *Eléments de Géométrie Algébrique, Ch. IV, 4e partie.* Publ. Math. I.H.E.S. No 32, Paris, 1967.
[7] Hartshorne, R. Cohomological dimension of algebraic varieties. *Ann. of Math. 88* (1968), pp. 401-450.
[8] Nagata, M. A treatise on the 14-th problem of Hilbert. *Mem. of the College of Science, Univ. of Kyoto, 30* (1956), pp. 57-70.
[9] —— A theorem on finite generation of a ring. *Nagoya Math. J. 27* (1966), pp. 193-205.
[10] Ramella, L. On the Nagata transform of an ideal. *Rend. Sem. Mat. Univ. e Politec. Torino (à paraître).*
[11] Stagnaro, E. Su alcune generalizzazioni della nozione di dominio fattoriale. *Ann. Univ. Ferrara 29* (1974), pp. 157-179.
[12] Tamone, G. Su una condizione di fattorialità debole e l'annullamento del gruppo di Picard. *Ann. di Matem. 112* (1974), pp. 285-304.

(Reçu le 4 décembre 1978)

Domenico Arezzo
Luciana Ramella

Istituto di Matematica
via L. B. Alberti 4
16132 GENOVA (Italie)