Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 25 (1979)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: BEISPIEL EINER PERIODISCHEN INSTABILEN HOLOMORPHEN STRÖMUNG

Autor: Müller, Thomas

Kapitel: 1. Beschreibung des Beispiels

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-50385

dass eine 1-codimensionale kompakte holomorphe Blätterung eines komplexen Raumes X immer stabil ist. Insbesondere muss X also nicht kompakt sein. Beispiele von instabilen kompakten holomorphen Blätterungen waren selbst im Fall von nicht kompakten komplexen Räumen bisher unbekannt.

In der vorliegenden Arbeit wird eine instabile periodische holomorphe Strömung auf einer nicht kompakten 3-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit konstruiert. Alle Bahnen sind eindimensionale Tori der Form

$$T : \mathbf{C} / G \text{ mit } G : = \mathbf{Z} + i\mathbf{Z}$$

Lässt man in diesem Beispiel jeweils die Imaginärteile weg, so erhält man die von Epstein in [4] beschriebene reelle instabile periodische Strömung auf einer nicht-kompakten 3-dimensionalen Mannigfaltigkeit.

1. Beschreibung des Beispiels

Die additive Gruppe $G : = \mathbf{Z} + i\mathbf{Z}$ operiere wie folgt auf den beiden Räumen $\mathbf{C}^3$ und $\mathbf{C}^2 \times \mathbf{C}^* : = \{ (z_1, z_2, z_3) \in \mathbf{C}^3, z_3 \neq 0 \}$:

$$\Phi\colon\; G \times \mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}^3, \qquad (g\colon z_1, z_2, z_3) \to (z_1, z_2 + g, z_3)$$

$$\Psi\colon\; G \times \mathbf{C}^2 \times \mathbf{C}^* \to \mathbf{C}^2 \times \mathbf{C}^*, \quad (g\colon z_1, z_2, z_3) \to \left(z_1 + g, z_2 + \frac{g}{z_3}, z_3 \right)$$

Seien $g_1, g_2 \in G$. Dann bezeichnen Φ_{g_1} und Ψ_{g_2} die von g_1 bzw. g_2 durch Φ bzw. Ψ induzierten Automorphismen von $\mathbf{C}^3$ bzw. $\mathbf{C}^2 \times \mathbf{C}^*$. Auf $\mathbf{C}^2 \times \mathbf{C}^*$ operiert die Automorphismengruppe $H : = \{ \Phi_{g_1} \circ \Psi_{g_2}; g_1, g_2 \in G \}$ eigentlich diskontinuierlich und sogar frei. Der Quotient $(\mathbf{C}^2 \times \mathbf{C}^*)/H = : X_1$ ist somit eine komplexe Mannigfaltigkeit. Sei

$$F_2 : = \{ (z_1, z_2, z_3) \in \mathbf{C}^3,\; 0 < \operatorname{Re}(z_1) < 1, 0 < \operatorname{Im}(z_1) < 1 \},$$
$$F_0 : = \{ (z_1, z_2, z_3) \in F_2,\; z_3 \neq 0 \}.$$

Die Automorphismengruppe $G_\Phi : = \{ \Phi_g, g \in G \}$ operiert eigentlich diskontinuierlich und sogar frei auf F_2 und F_0. Die Quotienten $F_2/G_\Phi = : X_2$ und $F_0/G_\Phi = : X_0$ sind somit komplexe Mannigfaltigkeiten. Wegen $\Psi_g(F_0) \cap F_0 = \phi$ für alle $g \neq 0$ kann $F_0/G_\Phi = X_0$ als offene Teilmenge von X_1 aufgefasst werden. X_0 ist offen in X_1 und in X_2 und gleich dem Durchschnitt $X_1 \cap X_2$.

Wir können nun den Raum X, auf welchem wir die gesuchte Strömung konstruieren werden, definieren:

$$X := X_1 \cup X_2 .$$

X ist hausdorffsch, denn die Punkte aus $X_1 - X_2$ und $X_2 - X_1$ lassen sich schon allein wegen der unterschiedlichen z_3-Koordinate der Repräsentanten trennen. Somit ist X eine komplexe Mannigfaltigkeit.

Man kann X als Quotient von $\tilde{X} := (\mathbf{C}^2 \times \mathbf{C}^*) \cup F_2$ auffassen. Die Strömung

$$\tilde{\varphi}: \mathbf{C} \times \tilde{X} \to \tilde{X}, \quad (z: z_1, z_2, z_3) := (z_1 + z_3 z, z_2 + z, z_3)$$

induziert auf dem Quotienten X die gesuchte holomorphe Strömung

$$\varphi: \mathbf{C} \times X \to X, \quad (z: [z_1, z_2, z_3]) := [\tilde{\varphi}(z: z_1, z_2, z_3)] .$$

Für $z_3 = 0$ und $g \in G \subset \mathbf{C}$ haben wir:

$$\varphi(g: [z_1, z_2, z_3]) = [z_1, z_2 + g, z_3] = [z_1, z_2, z_3]$$

Für $z_3 \neq 0$ und $g \in G \subset \mathbf{C}$ haben wir:

$$\varphi\left(\frac{g}{z_3}: [z_1, z_2, z_3]\right) = \left[z_1 + g, z_2 + \frac{g}{z_3}, z_3\right] = [z_1, z_2, z_3] .$$

Die Bahnen sind somit biholomorph äquivalente eindimensionale komplexe Tori. Man sieht leicht, dass die Strömung auf $X_2 - X_1$ instabil ist.

Auf $X_1 = (\mathbf{C}^2 \times \mathbf{C}^*)/H$ definiert

$$\varphi^*: (\mathbf{C}/G) \times X_1 \to X_1 ,$$

$$\varphi^*([z]: [z_1, z_2, z_3]) := \varphi\left(\frac{z}{z_3}: [z_1, z_2, z_3]\right)$$

eine freie und eigentliche Operation der Torusgruppe $T := \mathbf{C}/G$ mit gleichen Bahnen wie bei der Operation φ. X_1 ist somit ein Torusbündel über X_1/T. Die Tori des Bündels sind gerade die Bahnen der Strömung $\varphi \mid \mathbf{C} \times X_1 \to X_1$. Auf $X_2 - X_1$ lässt sich das von φ^* definierte Torusbündel nicht fortsetzen, wohl aber die Strömung $\varphi \mid \mathbf{C} \times X_1 \to X_1$.

Globale Funktionen auf X dürfen nur von z_3 abhängen. X ist also nicht holomorph konvex.