Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 25 (1979)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: TRANSFORMATION DE MELLIN ET DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES

Autor: Jeanquartier, Pierre

Kapitel: 4. Comportement asymptotique au voisinage de l'origine

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-50384

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 05.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

2) $\mathscr{E}'_+$ *est égal à la réunion des espaces* $\mathscr{E}^s_r$, $r, s \in \mathbf{R}$.

Démonstration. 1) Si $f \in \mathscr{E}^{m+1}_m$ avec $m \in \mathbf{N}$, la proposition 3.4 montre que f est de classe C^m sur $[0, \infty[$ et que $f^{(j)}(0) = 0$ pour $0 \leqslant j \leqslant m$; il suffit de prendre m arbitrairement grand pour obtenir $f \in C^\infty_0$.

Si $f \in C^\infty_0$, la proposition 3.5 montre que $f \in \mathscr{E}^m_r$ quels que soient $m \in \mathbf{N}$ et $r \in \mathbf{R}$.

2) Si $T \in \mathscr{E}'_+$, la proposition 1.5 entraîne que $T = D^m(t^{-q}g)$ avec $m, q \in \mathbf{N}$ et $g \in C^0_+$. Or $f = tg \in \mathscr{E}$ et $T = D^m(t^{-(q+1)}f)$ appartient à $\mathscr{E}^{-m}_{-(q+1)}$ en raison de la proposition 3.3 et de la formule de Leibniz.

4. Comportement asymptotique au voisinage de l'origine

Soit $\mathscr{E}^{-\infty}_r$ la réunion des espaces $\mathscr{E}^s_r$, $s \in \mathbf{R}$. On peut considérer que l'appartenance à $\mathscr{E}^{-\infty}_r$ caractérise *l'ordre de grandeur* d'une distribution au voisinage de l'origine. En effet, le théorème 3.1 montre que cette appartenance est une propriété du germe à l'origine; d'autre part, l'égalité $\mathscr{E}^{-\infty}_r = t^r \mathscr{E}^{-\infty}_0$ qui résulte de (2.9) et les propositions 3.4 et 3.5 montrent que la propriété $T \in \mathscr{E}^{-\infty}_r$ est voisine des propriétés $T = o(t^r)$ ou $T = O(t^r)$ lorsque $t \to +0$.

Exemples. Soit $\chi \in C^\infty(\mathbf{R}_+)$ une fonction à support borné égale à 1 au voisinage de 0. Posons $X = \mathfrak{M}\chi$. On a $X(z) = z^{-1}\Phi(z)$, où $\Phi = -\mathfrak{M}(D\chi)$ est la transformée de Mellin d'une fonction de $\mathscr{D}(\mathbf{R}_+)$ (voir le théorème 3.1 pour les propriétés de Φ) et $\Phi(0) = 1$. Pour $p \in \mathbf{C}$ et $k \in \mathbf{N}$ posons

$$\chi_{p,k}(t) = t^p (\log t)^k \chi(t). \tag{4.1}$$

On a $X_{p,k}(z) = \mathfrak{M}\chi_{p,k}(z) = X^{(k)}(z+p)$, fonction méromorphe de z avec un pôle d'ordre $k+1$ en $-p$, de partie principale $(-1)^k k!\,(z+p)^{-(k+1)}$. De plus, si le support de χ est contenu dans $]0, a]$, quel que soit $m \in \mathbf{N}$,

$$(1+|z|)^m (z+p)^{k+1} X_{p,k}(z)\, a^{-\operatorname{Re} z} \text{ est borné pour } \operatorname{Re} z \geqslant -m. \tag{4.2}$$

Etant donné s réel, on a $\chi_{p,k} \in \mathscr{E}^s_r$ si et seulement si $\operatorname{Re} p > r$.

DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES. Donnons-nous une suite (p_j) de nombres complexes distincts telle que $\operatorname{Re} p_j \to +\infty$ lorsque $j \to \infty$ et une suite (m_j) de $\mathbf{N}$.

Pour tout $r \in \mathbf{R}$, soit $J(r) = \{(j, k) \in \mathbf{N}^2;\ \operatorname{Re} p_j \leqslant r, 0 \leqslant k \leqslant m_j\}$ et soit J la réunion des $J(r)$.

Considérons la famille $\mathscr{F}$ des fonctions $\chi_{p_j,k}$, $(j, k) \in J$, avec (4.1).

DÉFINITIONS. 1) On dit que $f \in \mathscr{E}'_+$ admet un *développement asymptotique généralisé à l'ordre* r ($r \in \mathbf{R}$), par rapport à $\mathscr{F}$, s'il existe des nombres $a_{j,k} \in \mathbf{C}$, $(j, k) \in J(r)$ tels que la différence

$$f_r = f - \sum_{(j,k) \in J(r)} a_{j,k} \chi_{p_j,k} \tag{4.3}$$

appartienne à $\mathscr{E}_r^{-\infty}$.

Les nombres $a_{j,k}$ sont alors déterminés de manière unique; en effet, pour qu'une combinaison linéaire des $X_{p_j,k}$, $(j, k) \in J(r)$, appartienne à un espace $\mathscr{H}_r^s$, il faut que ses coefficients soient tous nuls.

2) On dit que $f \in \mathscr{E}'_+$ admet un *développement asymptotique généralisé illimité*, par rapport à $\mathscr{F}$, si f admet un développement asymptotique généralisé à l'ordre r pour tout $r \in \mathbf{R}$.

3) Soit $s \in \mathbf{R}$. On dit que $f \in \mathscr{E}'_+$ admet un *développement asymptotique de type* $\mathscr{E}^s$, *à l'ordre* r ($r \in \mathbf{R}$), par rapport à $\mathscr{F}$, s'il existe des $a_{j,k}$, $(j, k) \in J(r)$, tels que $f_r \in \mathscr{E}_r^s$ avec (4.3).

4) On dit que $f \in \mathscr{E}'_+$ admet un *développement asymptotique de type* $\mathscr{E}^s$ *illimité*, par rapport à $\mathscr{F}$, si f satisfait à la définition 3 pour tout $r \in \mathbf{R}$.

5) On dit que $f \in \mathscr{E}'_+$ admet un *développement asymptotique illimité, indéfiniment dérivable*, par rapport à $\mathscr{F}$, si f satisfait à la définition 4 pour tout $s \in \mathbf{N}$.

Les propositions suivantes montrent que, sous des hypothèses convenables, les développements asymptotiques généralisés sont en fait des développements asymptotiques usuels, et réciproquement. La proposition 4.1 est une conséquence immédiate de la proposition 3.4 et de la remarque 2 qui suit cette proposition:

PROPOSITION 4.1. *Soit* $m \in \mathbf{N}$ *et* $f \in \mathscr{E}'_+$.

1) *Si* f *admet un développement asymptotique généralisé de type* $\mathscr{E}^{m+1}$, *à l'ordre* r, *par rapport à* $\mathscr{F}$, *alors* $f \in C^m(\mathbf{R}_+)$ *et il existe des nombres complexes* $a_{j,k}$ *tels que*

$$f(t) = \sum_{(j,k)\in J(r)} a_{j,k}\, t^{p_j} (\log t)^k + f_r(t), \tag{4.4}$$

avec $f_r^{(j)}(t) = o(t^{r-j})$ *lorsque* $t \to +0$, *pour* $0 \leqslant j \leqslant m$.

2) *Si* f *vérifie* (4.4) *avec* $f_r \in C^m(\mathbf{R}_+)$ *et* $f_r^{(j)}(t) = O(t^{r-j})$ *lorsque* $t \to +0$, *pour* $0 \leqslant j \leqslant m$, *alors* f *admet un développement asymptotique généralisé de type* $\mathscr{E}^m$, *à l'ordre* r' *pour tout* $r' < r$.

La proposition suivante découle facilement de la proposition 4.1.

PROPOSITION 4.2. *Pour que* $f \in \mathscr{E}'_+$ *admette un développement asymptotique illimité indéfiniment dérivable, par rapport à* $\mathscr{F}$, *il faut et il suffit que* $f \in C^\infty(\mathbf{R}_+)$ *et que*

$$f(t) \sim \sum_{(j,k)\in J} a_{j,k}\, t^{p_j} (\log t)^k \tag{4.5}$$

lorsque $t \to +0$, *développement asymptotique au sens usuel, indéfiniment dérivable terme à terme.*

L'existence d'un développement asymptotique pour une distribution f de $\mathscr{E}'_+$ est équivalente à des propriétés de méromorphie et de croissance pour la transformée de Mellin de f. Un exemple est fourni par la proposition 4.3; (voir aussi [5], proposition 1.1, page 397, où il est montré que, pour des topologies naturelles, la transformation de Mellin est un isomorphisme vectoriel topologique de l'espace des fonctions admettant un développement asymptotique sur l'espace de leurs transformées de Mellin).

PROPOSITION 4.3. *Soit* $f \in \mathscr{E}'_+$, $F = \mathfrak{M}f$. *Pour que* f *admette un développement asymptotique illimité indéfiniment dérivable, par rapport à* $\mathscr{F}$, *il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :*

a) F *est méromorphe dans* $\mathbf{C}$ *avec pôle d'ordre* $\leqslant m_j + 1$ *au point* $-p_j$ *pour tout* $j \in \mathbf{N}$.

b) *Il existe* $a > 0$ *tel que, pour tout* $m \in \mathbf{N}$, $(1+|z|)^m F(z)\, a^{-\operatorname{Re} z}$ *soit borné en dehors d'un compact du demi-plan* $\operatorname{Re} z \geqslant -m$.

Démonstration. Les conditions a) et b) sont nécessaires: Soit $a > 0$ tel que les supports de f et χ soient dans $]0, a]$, où χ est la fonction qui intervient dans (4.1). Quel que soit $m \in \mathbf{N}$, en prenant $r = m+1$, et en définissant f_r par (4.3), on peut supposer que $f_r \in \mathscr{E}^m_r$, donc que $F_r(z) = \mathfrak{M}f_r(z) = (z+r+1)^{-m} G_r(z+r)$ est holomorphe pour $\operatorname{Re} z > -r$,

avec $G_r \in \mathscr{H}$. La caractérisation de $\mathscr{H} = \mathfrak{M}\mathscr{E}$ au théorème 3.2 et le lemme 1.6 montrent que $(1+|z|)^m F_r(z)\, a^{-\operatorname{Re} z}$ est borné pour $\operatorname{Re} z \geqslant -m$. Comme $F(z) = \sum_{(j,k) \in J(r)} a_{j,k} X_{p_j,k}(z) + F_r(z)$, F est méromorphe dans $\operatorname{Re} z > -r$ et ses pôles sont ceux des $a_{j,k} X_{p_j,k}$, d'où a) et b) compte tenu de (4.2).

Les conditions a) et b) sont suffisantes: Soit

$$\sum_{k=0}^{m_j} a_{j,k}(-1)^k k!\,(z+p_j)^{-(k+1)}$$

la partie principale de F au pôle $-p_j$. Etant donné $r \in \mathbf{R}$, posons

$$F_r(z) = F(z) - \sum_{(j,k) \in J(r)} a_{j,k} X_{p_j,k}(z).$$

Si $n \in \mathbf{N}$, d'après b) pour $m > \max(n, r)$, on a que $F_r \in \mathscr{H}_r^n$. Par transformation de Mellin inverse, il s'ensuit que f_r donnée par (4.3) appartient à $\mathscr{E}_r^n$, c.q.f.d.

Application. Nous allons appliquer les résultats précédents à la fonction

$$F(z) = \langle A_+^{z-1}, \Phi \rangle = \int_V (A(x))_+^{z-1}\, \Phi(x), \tag{4.6}$$

où A est une fonction analytique réelle, non constante, sur une variété analytique réelle V connexe, paracompacte, de dimension n, et Φ appartient à l'espace $\mathscr{D}(V)$ des n-formes différentielles impaires, de classe C^∞, à support compact dans V. Il est clair que F est holomorphe pour $\operatorname{Re} z > 1$, puisque l'application $(x, z) \mapsto (A(x))_+^{z-1}$ est continue, et holomorphe par rapport à z, pour $x \in V$ et $\operatorname{Re} z > 1$. Dans [1], en utilisant une version du théorème de résolution des singularités de Hironaka, Atiyah montre que F admet un prolongement analytique méromorphe dans $\mathbf{C}$. En reprenant sa méthode, nous allons préciser le résultat.

Soit U un ouvert relativement compact de V, dans lequel A n'ait pas d'autre valeur critique que la valeur 0. L'application linéaire continue $A^* : C^\infty(\mathbf{R}) \to C^\infty(U)$ telle que $A^* \psi(x) = \psi(A(x))$, donne par transposition une application linéaire continue A_* de $\mathscr{D}(U)$ dans $\mathscr{M}_c(\mathbf{R})$ l'espace des mesures à support compact sur $\mathbf{R}$, définie par $\langle A_* \Phi, \psi \rangle = \langle \Phi, A^* \psi \rangle = \int_U \psi(A(x))\, \Phi(x)$, pour $\Phi \in \mathscr{D}(U)$ et $\psi \in C^\infty(\mathbf{R})$. Comme $dA \neq 0$ dans $U^* = \{ x \in U \,;\, A(x) \neq 0 \}$, il existe dans U^* une $(n-1)$-forme impaire Ω de classe C^∞ telle que $\Phi = dA \wedge \Omega$ et l'on a, pour $\psi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^*)$, $\langle A_* \Phi, \psi \rangle = \int f(t)\, \psi(t)\, dt$ avec $f(t) = \int_{A^{-1}(t)} \Omega(x)$, l'injection de $A^{-1}(t) \cap U^*$ dans U^* étant convenablement orientée. Ainsi, dans $\mathbf{R}^*$

$= \mathbf{R} \setminus \{ 0 \}$, $A_* \Phi$ coïncide avec la fonction f de classe C^∞ et A_* induit une application linéaire continue de $\mathscr{D}(U^*)$ dans $\mathscr{D}(\mathbf{R}^*)$. Par dualité on obtient donc une application linéaire continue de $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^*)$ dans $\mathscr{D}'(U^*)$ l'espace des distributions dans U^*, définie par $\langle A^*S, \Phi \rangle = \langle S, A_* \Phi \rangle$ pour $S \in \mathscr{D}'(R^*)$ et $\Phi \in \mathscr{D}(U^*)$; A^*S est l'image réciproque de S par A. Soit $\delta_t(A) = A^* \delta_t$ l'image réciproque par A de la mesure de Dirac δ_t au point $t \neq 0$. On a

$$f(t) = \langle \delta_t(A), \Phi \rangle = A_* \Phi(t) . \tag{4.7}$$

PROPOSITION 4.4. *Soit U un ouvert relativement compact de V, dans lequel A n'ait pas d'autre valeur critique que* 0. *Il existe un entier $q = q(U) \geqslant 1$ tel que, pour toute $\Phi \in \mathscr{D}(U)$, la fonction F définie par* (4.6) *vérifie les conditions* a) *et* b) *de la proposition* 4.3, *avec $p_j = -1 + (j+1)/q$ et $m_j \leqslant n - 1$ ($j \in \mathbf{N}$, $n = \dim V$). F est la transformée de Mellin de la fonction f donnée par* (4.7); *f est intégrable et de classe C^∞ sur R_+; lorsque $t \to +0$, f admet un développement asymptotique*

$$f(t) \sim \sum a_{j,k} t^{-1+(j+1)/q} (\log t)^k \tag{4.8}$$

($j, k \in \mathbf{N}$, $0 \leqslant k \leqslant n - 1$), *indéfiniment dérivable terme à terme.*

Démonstration. (Voir aussi [4]). En suivant la démarche de [1], par désingularisation et localisation, on se ramène au cas où $V = \mathbf{R}^n$ et

$$F(z) = \int_Q (x_1^{q_1} \dots x_n^{q_n})^{z-1} \varphi(x)\, dx ,$$

avec $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$, $Q = \{ x \in \mathbf{R}^n ; x_k \geqslant 0, 1 \leqslant k \leqslant n \}$, et où les q_k sont des entiers $\geqslant 0$ non tous nuls.

Nous dirons qu'une fonction $F_k(x_1, \dots, x_k; z)$ a la propriété P_k ($0 \leqslant k \leqslant n$, P_0 est à interpréter de manière évidente) si

1) $F_k \in C^\infty(\mathbf{R}^k \times (\mathbf{C} \setminus S_k))$, S_k étant une partie fermée discrète, bornée supérieurement, de $\mathbf{R}$.

2) Pour tout $z \in \mathbf{C} \setminus S_k$, $x' \mapsto F_k(x'; z)$ est une fonction appartenant à $C^\infty(\mathbf{R}^k)$, à support dans un compact fixe de $\mathbf{R}^k$.

3) Pour tout $x' \in \mathbf{R}^k$, $z \mapsto F_k(x'; z)$ est méromorphe dans $\mathbf{C}$ avec pôles d'ordre $\leqslant n - k$ aux points de S_k.

4) Si $k \leqslant n - 1$, il existe $a_k > 0$ tel que, quels que soient $\alpha \in \mathbf{N}^k$, $m \in \mathbf{N}$, on ait $| \partial_{x'}^\alpha F_k(x'; z) | \leqslant C_{\alpha m} (1 + |z|)^{-m} a_k^{\operatorname{Re} z}$ pour $x' \in \mathbf{R}^k$, $\operatorname{Re} z \geqslant -m$, distance $(z, S_k) \geqslant 1$, avec $C_{\alpha m} > 0$.

$F_n = \varphi$ a la propriété P_n, et les propriétés a) et b) de la proposition 4.3 pour F, équivalent à la propriété P_0 pour $F_0 = F$, avec

$$S_0 = \{ 1 - (j+1)/q \,;\, j \in \mathbf{N} \},$$

q entier > 0. Il suffit donc de prouver que si F_{k+1} a la propriété P_{k+1} alors

$$F_k(x'; z) = \int_0^\infty t^{q_{k+1}(z-1)} F_{k+1}(x', t; z)\, dt$$

a la propriété P_k. Or, avec les notations du début du paragraphe, la formule de Taylor donne

$$F_{k+1}(x', t; z) = \sum_{j=0}^{\mu} \frac{1}{j!} \partial_{k+1}^j F_{k+1}(x', 0; z)\, t^j \chi(t) + t^{\mu+1} R_\mu(x', t; z)$$

avec

$$R_\mu(x', t; z) = t^{-(\mu+1)} (1 - \chi(t)) F_{k+1}(x', t; z)$$

$$+ \chi(t) \int_0^1 \frac{(1-s)^\mu}{\mu!} \partial_{k+1}^{\mu+1} F_{k+1}(x', ts; z)\, ds\,.$$

On a donc, avec $X = \mathfrak{M}\chi$,

$$F_k(x'; z) = \sum_{j=0}^{\mu} \frac{1}{j!} \partial_{k+1}^j F_{k+1}(x', 0; z)\, X(zq_{k+1} - q_{k+1} + j + 1)$$

$$+ \int_0^\infty t^{q_{k+1}(z-1)+\mu+1} R_\mu(x', t; z)\, dt\,.$$

En prenant μ arbitrairement grand, on montre facilement que F_k a la propriété P_k avec $S_k = S_{k+1} \cup \{ 1 - (j+1)/q_{k+1} \,;\, j \in \mathbf{N} \}$.

Puisque F a les propriétés a) et b) de la proposition 4.3, on a $F = \mathfrak{M}g$ où $g \in \mathscr{E}'_+$ est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}_+$ et admet, lorsque $t \to +0$, un développement asymptotique du type (4.8) indéfiniment dérivable terme à terme; en particulier, $g(t) = o(t^{-1+1/2q})$ lorsque $t \to +0$ et g est intégrable sur $\mathbf{R}_+$. Par ailleurs, on a vu que $A_* \Phi$ était une mesure à support compact sur $\mathbf{R}$ prolongeant la fonction f considérée sur $\mathbf{R}_+$; par suite, $f \in \mathscr{E}'_+$ et pour $\operatorname{Re} z > 1$,

$$\mathfrak{M}f(z) = \langle A_* \Phi, t_+^{z-1} \rangle = \int_V (A(x))_+^{z-1} \Phi(x) = F(z) = \mathfrak{M}g(z)\,.$$

On en déduit $f = g$.