Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 25 (1979)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: TRANSFORMATION DE MELLIN ET DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES

Autor: Jeanquartier, Pierre

Kapitel: 3. Théorèmes du type de Paley-Wiener

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-50384

$$(-1)^m c^{-1} \theta_{z_1,n_1} * \ldots * \theta_{z_k,n_k},$$

où $\theta_{w,n} = (-1)^{n-1} t^w (\log t)^{n-1} \theta/(n-1)\,!$ est la transformée de Mellin inverse de la fonction $z \mapsto (z+w)^{-n}$.

3. Théorèmes du type de Paley-Wiener

Théorème 3.1. *Soit* $F \in \mathscr{H}_+$.

1) *F est la transformée de Mellin d'une distribution à support dans $[a^{-1}, a]$ $(a \geqslant 1)$ si et seulement si F est entière et vérifie une inégalité*

$$|F(z)| \leqslant C(1+|z|)^m a^{|\mathrm{Re}\, z|}, \qquad z \in \mathbf{C}, \tag{3.1}$$

avec $m \in \mathbf{N}$ *et* $C > 0$.

2) *F est la transformée de Mellin d'une fonction C^∞ à support dans $[a^{-1}, a]$ $(a>1)$ si et seulement si F est entière et, pour tout $m \in \mathbf{N}$, il existe $C_m > 0$ tel que*

$$|F(z)| \leqslant C_m (1+|z|)^{-m} a^{|\mathrm{Re}\, z|}, \qquad z \in \mathbf{C}. \tag{3.2}$$

Démonstration. (Voir aussi [6], pages 3 à 13, [7], théorème 16, page 272 et [3], théorème 1.7.7, page 21).

1) Soit T une distribution sur $\mathbf{R}$ à support dans $[a^{-1}, a]$. Il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que T soit d'ordre $\leqslant m$ et

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leqslant M \sum_{j=0}^{m} \sup_t |\varphi^{(j)}(t)| \tag{3.3}$$

pour tout $\varphi \in C^m(\mathbf{R}_+)$, avec $M > 0$. Soit $\chi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}_+)$ égale à 1 au voisinage de $[a^{-1}, a]$. On a $F(z) = \langle T, t^{z-1}\chi \rangle$ et F est entière. Soit $\psi \in C^\infty(\mathbf{R})$ nulle pour $t \geqslant 3$ et égale à 1 pour $t \leqslant 2$. Posons

$$\varphi_z(t) = \chi(t)\, \psi(t^{|z|} a^{-|z|})\, \psi(t^{-|z|} a^{-|z|})\, t^{z-1}.$$

On a $\varphi_z \in C^\infty(\mathbf{R})$, et comme $\varphi_z(t) = t^{z-1}$ au voisinage du support de T, $F(z) = \langle T, \varphi_z \rangle$. D'après (3.3), en majorant les dérivées de φ_z, on obtient (3.1).

Soit F entière vérifiant (3.1). On a $F = \mathfrak{M}T$ avec $T = \mathfrak{N}F = (-D)^{m+2} g_\pm$, où

$$g_{\pm}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(s)} t^{-z} F(z)\, z^{-(m+2)}\, dz\,,$$

$\gamma(s)$ étant la droite $\operatorname{Re} z = s$ orientée dans le sens $\operatorname{Im} z$ croissant, avec $\pm s > 0$; cela résulte de la définition de $\mathfrak{M}$ si $s > 0$, et provient du fait que $g_+ - g_-$ est un polynôme en $\log t$ de degré $\leqslant m + 1$ si $s < 0$. L'inégalité (3.1) entraîne

$$|\, g_{\pm}(t)\,| \leqslant A\, a^{|s|}\, t^{-s}$$

lorsque $|\, s\,| > 1$, A constante > 0. En faisant tendre s vers $+\infty$ ou $-\infty$ on obtient $g_+(t) = 0$ pour $t > a$ et $g_-(t) = 0$ pour $t < a^{-1}$, de sorte que le support de T est contenu dans $[a^{-1}, a]$.

2) Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}_+)$ une fonction à support dans $[a^{-1}, a]$. Il est clair que $F = \mathfrak{M}\varphi$ est une fonction entière et que, pour tout entier $k \geqslant 0$,

$$|\, z^k F(z)\,| = \left| \int_{a^{-1}}^{a} D^k \varphi(t)\, t^{z-1}\, dt \right| \leqslant A_k\, a^{|\operatorname{Re} z|}\,,$$

A_k constante positive, d'où l'inégalité (3.2).

Inversement, si F entière vérifie (3.2) pour tout $m \in \mathbf{N}$, on a $F = \mathfrak{M}\varphi$, où $\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(s)} t^{-z} F(z)\, dz$ est une fonction C^∞, à support dans $[a^{-1}, a]$ d'après 1), c.q.f.d.

ESPACES $\mathscr{E}$ ET $\mathscr{H}$. Dans la suite, nous désignerons par $\mathscr{E}$ le sous-espace de $L^2(\mathbf{R}_+, t^{-1}\, dt)$ formé des fonctions à support borné, muni de la norme

$$\|\, f\,\|_{\mathscr{E}} = \left(\int_0^\infty |\, f(t)\,|^2\, t^{-1}\, dt \right)^{1/2}, \qquad f \in \mathscr{E}\,.$$

Il est clair que $\mathscr{E} \subset \mathscr{E}'_+ \cap L^1(\mathbf{R}_+) \cap L^2(\mathbf{R}_+)$.

Par exemple, si f est une fonction de carré intégrable à support borné telle que $|\, f(t) - f(0)\,| \leqslant C\, t^\alpha$ lorsque $t \to +0$, avec C et $\alpha > 0$, on a $f \in \mathscr{E}$ si et seulement si $f(0) = 0$.

Le théorème suivant caractérise l'espace $\mathscr{H} = \mathfrak{M}\mathscr{E}$:

THÉORÈME 3.2. *Pour qu'une fonction* F *soit la transformée de Mellin d'une fonction* $f \in \mathscr{E}$ *à support dans* $]0, a]$ $(a > 0)$, *il faut et il suffit que les conditions suivantes soient satisfaites :*

1) *F est holomorphe dans le demi-plan* $\operatorname{Re} z > 0$,

2) *la fonction* $F_x : y \mapsto F(x+iy)$ *appartient à* $L^2(R)$ *pour tout* $x > 0$ *et il existe une constante* $C > 0$ *telle que*

$$\| F_x \|_{L^2(\mathbf{R})} \leqslant C a^x, \quad \textit{pour tout } x > 0 .$$

Si les conditions précédentes sont vérifiées, F_x *tend vers une limite* F_0 *dans* $L^2(R)$ *lorsque* $x \to +0$ *et*

$$\text{(3.4)} \qquad \| F_x \|_{L^2(\mathbf{R})} = \sqrt{2\pi} \| t^x f \|_{\mathscr{E}} \quad \textit{pour tout } x \geqslant 0 .$$

Démonstration. (Voir aussi [6], théorème 5, page 8). Soit $f \in \mathscr{E}$ à support contenu dans $]0, a]$, $a > 0$. Pour $x = \operatorname{Re} z > 0$, $y = \operatorname{Im} z$, on a $F(z) = \mathfrak{M} f(z) = \int_0^\infty f(t)\, t^{z-1}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g_x(s)\, e^{iys}\, ds$, avec $g_x(s) = f(e^s)\, e^{sx} = g_0(s)\, e^{sx}$, $g_0 \in L^2(\mathbf{R})$, g_0 nulle au voisinage de $+\infty$, $\| g_x \|_{L^2(\mathbf{R})} = \| t^x f \|_{\mathscr{E}}$, $x \geqslant 0$. Autrement dit, la fonction F_x est la transformée de Fourier de $g_x \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$ pour $x > 0$, et la formule de Plancherel donne (3.4) pour $x > 0$. Comme $g_x \to g_0$ dans $L^2(\mathbf{R})$ lorsque $x \to +0$, F_x tend vers une limite F_0 dans $L^2(\mathbf{R})$, F_0 étant la transformée de Fourier de g_0; de plus, la formule (3.4) reste valable pour $x = 0$. Enfin 1) et 2) sont vérifiés, l'inégalité de 2) avec $C = \sqrt{2\pi} \| f \|_{\mathscr{E}}$ résultant de (3.4).

Soit F une fonction vérifiant 1) et 2). En vertu du lemme 1.6, pour tout $r > 0$, on a $| F(z) | \leqslant C(r)\, a^{\operatorname{Re} z}$, pour $\operatorname{Re} z > r$, donc $F \in \mathscr{H}_+$. Soit $f = \mathfrak{N} F \in \mathscr{E}'_+$. Si $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}_+)$, comme $\mathfrak{N} F$ est limite dans $\mathscr{D}'(\mathbf{R}_+)$ des fonctions (2.7), on a

$$2\pi \langle f, \varphi \rangle = \lim_{A \to \infty} \int_0^\infty dt \int_{-A}^{+A} \varphi(t)\, t^{-x-iy} F_x(y)\, dy .$$

Le théorème de Fubini donne, avec $\Phi = \mathfrak{M} \varphi$,

$$2\pi \langle f, \varphi \rangle = \int \Phi_{1-x}(-y)\, F_x(y)\, dy ,$$

d'où, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$2\pi | \langle f, \varphi \rangle | \leqslant \| \Phi_{1-x} \|_{L^2(\mathbf{R})} \| F_x \|_{L^2(\mathbf{R})} .$$

Finalement, compte tenu de (3.4) valable quel que soit $x \in \mathbf{R}$ pour f remplacé par $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}_+)$,

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leqslant M \| t^{1-x} \varphi \|_{\mathscr{E}} a^x$$

avec $M > 0$. En posant $\psi = t^{1/2-x} \varphi$ il vient

$$|\langle t^{x-1/2} f, \psi \rangle| \leqslant M a^x \| \psi \|_{L^2(\mathbf{R}_+)} , \quad x > 0 ,$$

pour tout $\psi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}_+)$. Le théorème de représentation de Riesz entraîne alors que $t^{x-1/2} f \in L^2(\mathbf{R}_+)$ et que

$$\int_0^\infty (t/a)^{2x} |f(t)|^2 t^{-1} dt \leqslant M^2$$

pour tout $x > 0$. Lorsque $x \to \infty$, cette inégalité implique que le support de f est contenu dans $]0, a]$; si $x \to +0$, elle donne que $f \in \mathscr{E}$, c.q.f.d.

Comme application du théorème précédent, nous allons introduire des espaces qui permettront de classer les éléments de $\mathscr{E}'_+$ en fonction de leur régularité et de leur ordre de grandeur au voisinage de l'origine.

Espaces $\mathscr{H}^s_r$ et $\mathscr{E}^s_r$. Etant donné deux nombres réels r et s, nous désignerons par $\mathscr{H}^s_r$ l'ensemble des fonctions $F \in \mathscr{H}_+$ telles que $(z+r+1)^s F(z) = G(z+r)$, avec $G \in \mathscr{H} = \mathfrak{M}\mathscr{E}$; en particulier $\mathscr{H}^0_0 = \mathscr{H}$. Ainsi, si $F \in \mathscr{H}^s_r$, $F(z)$ est holomorphe pour $\operatorname{Re} z > -r$ et l'application

$$y \mapsto (x + iy + r + 1)^s F(x + iy)$$

est dans $L^2(\mathbf{R})$ pour $x > -r$.

On a $\mathscr{H}^s_r \subset \mathscr{H}^{s'}_{r'}$ si et seulement si $r' \leqslant r$ et $s' \leqslant s$.

Nous poserons $\mathscr{E}^s_r = \mathfrak{N} \mathscr{H}^s_r$ la transformée de Mellin inverse de $\mathscr{H}^s_r$; en particulier $\mathscr{E}^0_0 = \mathscr{E}$.

Dans le cas où s est un entier, on peut caractériser $\mathscr{E}^s_r$ directement:

Proposition 3.3. *Soit m un entier $\geqslant 0$ et soit $T \in \mathscr{E}'_+$.*

a) *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a.1) $T \in \mathscr{E}^m_r$.

(a.2) $t^{-r} D^j T \in \mathscr{E}$ *pour* $0 \leqslant j \leqslant m$.

(a.3) $t^{j-r} T^{(j)} \in \mathscr{E}$ *pour* $0 \leqslant j \leqslant m$.

b) *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(b.1) $T \in \mathscr{E}^{-m}_r$.

(b.2) $T = t^r \sum_{j=0}^{m} D^j f_j$ *avec* $f_j \in \mathscr{E}$.

(b.3) $T = \sum_{j=0}^{m} t^{r+j} h_j^{(j)}$ *avec* $h_j \in \mathscr{E}$.

Démonstration. Compte tenu de la formule de Leibniz et de l'égalité $\mathscr{E}_r^s = t^r \mathscr{E}_0^s$, on peut supposer que $r = 0$. Les équivalences de (a.2) et (a.3) ainsi que de (b.2) et (b.3) découlent du lemme 1.1.

Soit $F = \mathfrak{M}T$. On a $T \in \mathscr{E}_0^m \Leftrightarrow (z+1)^m F(z) = G(z)$ avec $G \in \mathscr{H}$ $\Leftrightarrow z^j F \in \mathscr{H}$ pour $0 \leqslant j \leqslant m \Leftrightarrow D^j T \in \mathscr{E}$ pour $0 \leqslant j \leqslant m$.

Si $T \in \mathscr{E}_0^{-m}$ on a $F(z) = (z+1)^m G(z)$ avec $G \in \mathscr{H}$. La formule du binôme donne (b.2) avec $f_j = (-1)^j \binom{m}{j} \mathfrak{N}G$.

Si T vérifie (b.2) avec $r = 0$, on a $F(z) = \sum_{j=0}^{m} (-z)^j \mathfrak{M}f_j(z)$ $= (1+z)^m G(z)$ avec $G(z) = \sum_{j=0}^{m} (-z)^j (1+z)^{-m} \mathfrak{M}f_j(z)$ donc $G \in \mathscr{H}$ et $T \in \mathscr{H}_0^{-m}$, c.q.f.d.

L'appartenance à la réunion $\mathscr{E}_{-\infty}^s$ des espaces $\mathscr{E}_r^s$, $r \in \mathbf{R}$, caractérise la régularité d'une distribution. On vérifie en effet que localement, les éléments de $\mathscr{E}_{-\infty}^s$ sont dans l'espace de Sobolev $H^s(\mathbf{R})$ formé des distributions S sur $\mathbf{R}$ telles que $(1+|x|^2)^{s/2} \hat{S}(x)$ soit de carré intégrable, $\hat{S}$ étant la transformée de Fourier de S. Nous démontrerons le résultat suivant:

PROPOSITION 3.4. *Soit* $s > m + 1/2$ *avec* $m \in \mathbf{N}$, *et* $r \in \mathbf{R}$. *Si* $f \in \mathscr{E}_r^s$, *on a* $f \in C^m(\mathbf{R}_+)$ *et*

$$f^{(j)}(t) = o(t^{r-j}) \quad \textit{lorsque} \quad t \to +0$$

pour $0 \leqslant j \leqslant m$.

Démonstration. On a $(z+r+1)^s \mathfrak{M}f(z) = G(z+r)$ avec $G \in \mathscr{H}$. Par suite, pour $x > -r$,

$$f^{(j)}(t) = \frac{(-1)^j}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} t^{-z-j} z(z+1)\dots(z+j-1)\, G(z+r)(z+r+1)^{-s}\, dz$$

fonction continue sur $\mathbf{R}_+$ pour $0 \leqslant j \leqslant m$, donc $f \in C^m(\mathbf{R}_+)$. Comme $G_x : y \mapsto G(x+iy)$ converge vers G_0 dans $L^2(\mathbf{R})$ lorsque $x \to +0$, on a aussi

$$f^{(j)}(t) = \frac{t^{r-j}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy\log t} \frac{(r-iy)(r-iy-1)\dots(r-iy-j+1)\, G_0(y)}{(1+iy)^s}\, dy$$

où l'intégrale tend vers 0 lorsque $t \to +0$, d'après le lemme de Riemann-Lebesgue. Par conséquent, $f^{(j)}(t) = o(t^{r-j})$ lorsque $t \to +0$, c.q.f.d.

Remarque 1. Si $s < m + 1/2$, $\mathscr{E}_r^s$ n'est pas contenu dans $C^m(\mathbf{R}_+)$. Soit en effet $f \in \mathscr{E}'_+$ tel que $(-D)^m f$ soit la fonction égale à 1 sur $]0, 1[$ et nulle sur $[1, \infty[$. Il est clair que $t^{r+1} f$ n'appartient pas à $C^m(\mathbf{R}_+)$ bien que $\mathfrak{M}(t^{r+1} f)(z) = (z+r+1)^{-m-1}$ appartienne à $\mathscr{H}_r^s$ pour $s < m + 1/2$.

Remarque 2. Si $f \in C^m(\mathbf{R}_+)$, $m \geqslant 0$, et si $f^{(j)}(t) = O(t^{r-j})$ lorsque $t \to +0$ pour $0 \leqslant j \leqslant m$, il est clair que $f \in \mathscr{E}_{r'}^m$ pour tout $r' < r$, puisque $f^{(j)} = t^{r'-j} h_j$ avec $h_j \in \mathscr{E}$ (proposition 3.3). En général, on ne peut pas remplacer r' par r: une fonction $f \in C^\infty(\mathbf{R}_+)$ qui est égale à $|\log t|^{-1/2}$ au voisinage de 0 vérifie $f^{(j)}(t) = o(t^{-j})$ lorsque $t \to +0$ pour $0 \leqslant j \leqslant m$. Cependant, quel que soit $s \in \mathbf{R}$, f n'appartient pas à $\mathscr{E}_0^s$; en effet, $\mathfrak{M}f(z) - C z^{-1/2}$ (C constante $\neq 0$) est entière.

La proposition suivante donne des conditions pour qu'une fonction de classe C^{m-1} soit dans $\mathscr{E}_r^m$.

Proposition 3.5. *Soit m un entier $\geqslant 1$, $r \in \mathbf{R}$ et $f \in C^{m-1}(\mathbf{R}_+)$ à support borné telle que $t^{m-r} f^{(m)} = g \in \mathscr{E}$.*

a) *Si $r < 0$, on a $f \in \mathscr{E}_r^m$.*

b) *Si $r > m - 1$, on a $f \in \mathscr{E}_r^m$ si et seulement si $f^{(j)}(t) \to 0$ lorsque $t \to +0$ pour $0 \leqslant j \leqslant m - 1$.*

c) *Si $0 \leqslant r \leqslant m - 1$, on a $f \in \mathscr{E}_r^m$ si et seulement si $f^{(j)}(t) \to 0$ lorsque $t \to +0$ pour $0 \leqslant j < r$ et $f^{(r)} \in \mathscr{E}$ si r entier.*

Démonstration. Soit $F = \mathfrak{M}f$ et $G = \mathfrak{M}g \in \mathscr{H}$. Par hypothèse $\mathfrak{M}(f^{(m)})(z) = (-1)^m (z-1)(z-2)\dots(z-m) F(z-m) = G(z+r-m)$. On a $f \in \mathscr{E}_r^m$ si et seulement si

$$G_0(z) = (z+1)^m F(z-r) = \frac{(-1)^m (z+1)^m G(z)}{(z-r)(z-r+1)\dots(z-r+m-1)}$$

est une fonction de $\mathscr{H}$.

a) Si $r < 0$, il est clair que $G_0 \in \mathscr{H}$ donc $f \in \mathscr{E}_r^m$.

b) Si $r > m - 1$, $G_0 \in \mathscr{H}$ si et seulement si $G(r-j) = 0$ pour $0 \leqslant j \leqslant m-1$. Puisque $f^{(m)} = t^{r-m} g$, on a pour $0 \leqslant j \leqslant m-1$

$$f^{(j)}(t) = \int_{\infty}^{t} \frac{(t-u)^{m-j-1}}{(m-j-1)\,!}\, u^{r-m} g(u)\, du$$

$$= \sum_{k=0}^{m-j-1} \frac{(-1)^{m-k-j-1}}{k\,!\,(m-k-j-1)\,!}\, t^k \int_{\infty}^{t} u^{r-k-j-1} g(u)\, du\,.$$

Mais, si $\alpha > 0$, $\displaystyle\int_{\infty}^{t} u^{\alpha-1} g(u)\, du = -G(\alpha) + o(t^{\alpha})$. En effet, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, lorsque $t \to +0$,

$$\left| \int_{0}^{t} u^{\alpha-1} g(u)\, du \right|^2 \leqslant \int_{0}^{t} u^{2\alpha-1}\, du \int_{0}^{t} |g(u)|^2 u^{-1}\, du = o(t^{2\alpha})\,.$$

Par suite

$$f^{(j)}(t) = \frac{(-1)^{m-j}}{(m-j-1)\,!}\, G(r-j) + o(1)\,, \tag{3.5}$$

et $G(r-j) = 0$ si et seulement si $f^{(j)}(t) = o(1)$.

c) Si $0 \leqslant r \leqslant m-1$, $G_0 \in \mathscr{H}$ si et seulement si $G(r-j) = 0$ pour $0 \leqslant j < r$ et $z^{-1} G \in \mathscr{H}$ dans le cas où r est entier. Comme précédemment l'égalité (3.5) est valable pour $0 \leqslant j < r$. On a donc $G(r-j) = 0$ si et seulement si $f^{(j)}(t) = o(1)$, avec $0 \leqslant j < r$.

Dans le cas où r est entier, $f \in \mathscr{E}_r^m$ entraîne $f^{(r)} \in \mathscr{E}$. Inversement, si $f^{(r)} = h \in \mathscr{E}$ et si $f^{(j)}(t) = o(1)$ pour $0 \leqslant j < r$ avec $r \geqslant 1$,

$$f(t) = \int_{0}^{t} \frac{(t-u)^{r-1}}{(r-1)!}\, h(u)\, du = t^r h_0(t)$$

où

$$h_0(t) = \frac{1}{(r-1)\,!} \int_{0}^{1} (1-s)^{r-1} h(st)\, ds$$

appartient à $\mathscr{E}$. Il s'ensuit que $F(z-r) = \mathfrak{M} h_0(z)$ est dans $\mathscr{H}$ donc aussi G_0, c.q.f.d.

PROPOSITION 3.6. 1) *L'intersection des espaces* $\mathscr{E}_r^s$, $r, s \in \mathbf{R}$, *est égale à l'ensemble* C_0^{∞} *des fonctions* C^{∞} *sur* $[0, \infty[$, *à support borné, plates en* 0.

2) *$\mathscr{E}'_+$ est égal à la réunion des espaces $\mathscr{E}_r^s$, r, $s \in \mathbf{R}$.*

Démonstration. 1) Si $f \in \mathscr{E}_m^{m+1}$ avec $m \in \mathbf{N}$, la proposition 3.4 montre que f est de classe C^m sur $[0, \infty[$ et que $f^{(j)}(0) = 0$ pour $0 \leqslant j \leqslant m$; il suffit de prendre m arbitrairement grand pour obtenir $f \in C_0^\infty$.

Si $f \in C_0^\infty$, la proposition 3.5 montre que $f \in \mathscr{E}_r^m$ quels que soient $m \in \mathbf{N}$ et $r \in \mathbf{R}$.

2) Si $T \in \mathscr{E}'_+$, la proposition 1.5 entraîne que $T = D^m(t^{-q}g)$ avec m, $q \in \mathbf{N}$ et $g \in C_+^0$. Or $f = tg \in \mathscr{E}$ et $T = D^m(t^{-(q+1)}f)$ appartient à $\mathscr{E}_{-(q+1)}^{-m}$ en raison de la proposition 3.3 et de la formule de Leibniz.

4. Comportement asymptotique au voisinage de l'origine

Soit $\mathscr{E}_r^{-\infty}$ la réunion des espaces $\mathscr{E}_r^s$, $s \in \mathbf{R}$. On peut considérer que l'appartenance à $\mathscr{E}_r^{-\infty}$ caractérise *l'ordre de grandeur* d'une distribution au voisinage de l'origine. En effet, le théorème 3.1 montre que cette appartenance est une propriété du germe à l'origine; d'autre part, l'égalité $\mathscr{E}_r^{-\infty} = t^r \mathscr{E}_0^{-\infty}$ qui résulte de (2.9) et les propositions 3.4 et 3.5 montrent que la propriété $T \in \mathscr{E}_r^{-\infty}$ est voisine des propriétés $T = o(t^r)$ ou $T = O(t^r)$ lorsque $t \to +0$.

Exemples. Soit $\chi \in C^\infty(\mathbf{R}_+)$ une fonction à support borné égale à 1 au voisinage de 0. Posons $X = \mathfrak{M}\chi$. On a $X(z) = z^{-1}\Phi(z)$, où $\Phi = -\mathfrak{M}(D\chi)$ est la transformée de Mellin d'une fonction de $\mathscr{D}(\mathbf{R}_+)$ (voir le théorème 3.1 pour les propriétés de Φ) et $\Phi(0) = 1$. Pour $p \in \mathbf{C}$ et $k \in \mathbf{N}$ posons

$$\chi_{p,k}(t) = t^p(\log t)^k \chi(t)\,. \tag{4.1}$$

On a $X_{p,k}(z) = \mathfrak{M}\chi_{p,k}(z) = X^{(k)}(z+p)$, fonction méromorphe de z avec un pôle d'ordre $k+1$ en $-p$, de partie principale $(-1)^k k!\,(z+p)^{-(k+1)}$. De plus, si le support de χ est contenu dans $]0, a]$, quel que soit $m \in \mathbf{N}$,

$$(1+|z|)^m (z+p)^{k+1} X_{p,k}(z)\, a^{-\mathrm{Re}\, z} \text{ est borné pour } \mathrm{Re}\, z \geqslant -m\,. \tag{4.2}$$

Etant donné s réel, on a $\chi_{p,k} \in \mathscr{E}_r^s$ si et seulement si $\mathrm{Re}\, p > r$.