Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

**Band:** 25 (1979)

**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: TRANSFORMATION DE MELLIN ET DÉVELOPPEMENTS

**ASYMPTOTIQUES** 

**Autor:** Jeanquartier, Pierre

**Kapitel:** 2. La transformation de Mellin et son inverse

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-50384

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 03.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

 $\delta(s)$  étant le rectangle x+r-is, x+r+is, x-r+is, x-r-is, où s>|y|. Si  $\gamma$  est un des côtés du rectangle parallèle à l'axe imaginaire, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\left| \int_{\gamma} \frac{F(w)}{w - z} dw \right|^{2} \leqslant M^{2} \int_{\gamma} \frac{dv}{r^{2} + (v - y)^{2}} = M^{2} \pi / r.$$

Soit  $I(s) = \int_{\sigma(s)} \frac{F(w)}{w - z} dw$ ,  $\sigma(s)$  étant le segment x - r + is, x + r + is. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|I(s)|^2 \leqslant \int_{x-r}^{x+r} |F(u+is)|^2 du \int_{x-r}^{x+r} \frac{du}{(u-x)^2 + (s-y)^2}$$
  
 $\leqslant \pi \int_{x-r}^{x+r} |F(u+is)|^2 du$ ,

en supposant  $|s| \gg |y| + 1$ . Par conséquent

$$\int_{|y|+1}^{\infty} (|I(s)|^2 + |I(-s)|^2) ds \leq 2\pi r M^2.$$

Il existe donc une suite  $(s_j)$  convergeant vers  $+\infty$  et telle que  $|I(s_j)|^2$   $+ |I(-s_j)|^2$  tende vers 0 lorsque  $j \to \infty$ . On a donc  $2\pi |F(z)| \le 2 M (\pi/r)^{1/2} + |I(s_j)| + |I(-s_j)|$  pour tout j, d'où le résultat lorsque  $j \to \infty$ 

# 2. La transformation de Mellin et son inverse

PROPOSITION 2.1. Si  $T \in \mathcal{E}'_+$ , on a  $DT \in \mathcal{E}'_+$  et  $t^pT \in \mathcal{E}'_+$  pour tout  $p \in \mathbb{C}$ . De plus

$$\mathfrak{M}(DT)(z) = -z\mathfrak{M}T(z),$$

$$\mathfrak{M}(t^pT)(z) = \mathfrak{M}T(z+p).$$

Démonstration. Si  $T \in \mathcal{E}'_+$ , il est clair que  $DT \in \mathcal{E}'_+$ . Le lemme 1.2 et la proposition 1.5 montrent que  $t^pT \in \mathcal{E}'_+$  si  $p \in \mathbb{C}$ .

Soit  $T_1$  une distribution à support compact, d'ordre  $\leq m$ , qui prolonge T. Pour Re z > m + 2, on a  $z\mathfrak{M}T(z) = \langle T_1, zt_+^{z-1} \rangle = -\langle T_1, t_+^z \rangle = -\langle DT_1, t_+^{z-1} \rangle = -\mathfrak{M}(DT)(z)$ , puisque  $DT_1$  est un prolongement de DT.

Soit maintenant k un entier  $\geqslant 0$  tel que  $\operatorname{Re} p + k > m$ . Alors  $t_+^{p+k}$  est de classe  $C^m$  et  $t_+^{p+k}$   $T_1$  est un prolongement de  $S = t^{p+k}$  T; on a donc, pour  $\operatorname{Re} z > m+1$ ,  $\mathfrak{M}S(z) = \langle t_+^{p+k} T_1, t_+^{z-1} \rangle = \langle T_1, t_+^{z+p+k-1} \rangle = \mathfrak{M}T(z+p+k)$ . En outre,  $S = t^k t^p T$ , de sorte que si  $T_2$  est un prolongement de  $t^p T$ ,  $t^k T_2$  est un prolongement de S; par suite, pour  $\operatorname{Re} z$  assez grand,  $\mathfrak{M}S(z) = \langle t^k T_2, t_+^{z-1} \rangle = \langle T_2, t_+^{z+k-1} \rangle = \mathfrak{M}(t^p T)(z+k)$ . Finalement,  $\mathfrak{M}(t^p T)(z) = \mathfrak{M}S(z-k) = \mathfrak{M}T(z+p)$ , c.q.f.d.

ALGÈBRE  $\mathscr{E}_{+}$ . Si S et T appartiennent à  $\mathscr{E}_{+}$ , on définit la convolution S \* T de S et T comme la distribution sur  $\mathbb{R}_{+}$  donnée par

$$(2.3) \qquad \langle S * T, \varphi \rangle = \langle S(s) \otimes T(t), \varphi(st) \rangle, \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}_{+}).$$

C'est la convolution associée à la structure de groupe multiplicatif de  $\mathbf{R}_+$ . On a  $S*T\in\mathscr{E}_+'$ ; en effet, si  $S_1$  et  $T_1$  sont des prolongements respectifs de S et T, S\*T est la restriction de  $S_1*T_1$  définie sur  $\mathbf{R}$  par une formule analogue à (2.3). Muni de la convolution,  $\mathscr{E}_+'$  est une algèbre commutative sur le corps  $\mathbf{C}$ .

ALGÈBRE  $\mathcal{H}_+$ . Nous considérerons des fonctions holomorphes définies dans des domaines du plan  $\mathbb{C}$  contenant des demi-plans du type  $\operatorname{Re} z > r \ (r \in \mathbb{R})$ . Deux telles fonctions seront identifiées si elles coïncident dans un tel demi-plan. Nous désignerons par  $\mathcal{H}_+$  l'espace des (classes de) fonctions F du type précédent vérifiant une inégalité

(2.4) 
$$|F(z)| \leq C(1+|z|)^m a^{\text{Re } z}$$
, Re  $z > r$ ,

où les constantes C > 0,  $m \in \mathbb{Z}$ , a > 0 et  $r \in \mathbb{R}$  dépendent de F.  $\mathcal{H}_+$  est une algèbre pour le produit  $FG : z \to F(z)$  G(z), F,  $G \in \mathcal{H}_+$ .

Par exemple, si  $T \in \mathscr{E}'_+$ , la transformée de Mellin  $F = \mathfrak{M}T$  de T appartient à  $\mathscr{H}_+$ . En effet, si le support de T est contenu dans ]0, a], il existe  $f \in C^0_+$  nulle pour  $t \geqslant a$  et  $m \in \mathbb{N}$  tels que  $T = f^{(m)}$  (proposition 1.5); par suite

$$\mathfrak{M}T(z) = (-1)^m (z-1)(z-2) \dots (z-m) \int_0^a f(t) t^{z-m-1} dt$$

vérifie (2.4) avec r > m.

On vérifie sans peine que  $\mathfrak{M}$  est un homomorphisme de l'algèbre  $\mathscr{E}_{+}$  dans l'algèbre  $\mathscr{H}_{+}$ .

TRANSFORMATION DE MELLIN INVERSE. Soit  $F \in \mathcal{H}_+$  vérifiant (2.4). Si j est un entier  $\geq 0$  tel que j > m + 1, posons pour t > 0

(2.5) 
$$K_{j}F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(s)} t^{-z} F(z) z^{-j} dz,$$

où  $\gamma(s)$  désigne la droite Re z=s orientée dans le sens Im z croissant, avec s>r (on peut supposer r>0). Il est clair que  $K_jF$  est une fonction continue sur  $\mathbf{R}_+$  ne dépendant pas de s>r. D'autre part, si x>r,

$$2\pi t^{x} K_{j}F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy \log t} F(x+iy) (x+iy)^{-j} dy,$$

où l'intégrale tend vers 0 lorsque  $t \to +0$ , d'après le lemme de Riemann-Lebesgue. Il s'ensuit que  $t^x K_j F$  est continue sur  $\overline{\mathbb{R}}_+$  si x > r. Enfin, d'après (2.4),  $|K_j F(t)| \leq M (a/t)^x$  pour x assez grand, où M est une constante positive; par conséquent, en faisant tendre x vers l'infini, on obtient que  $K_j F(t)$  est nul pour t > a et  $K_j F \in C_+^0$ .

On définit donc un élément  $\mathfrak{N}F$  de  $\mathscr{E}_{+}'$  en posant, pour j>m+1,

$$\mathfrak{N}F = (-D)^j K_j F,$$

et  $\mathfrak{N}F$  ne dépend pas de j puisque, en vertu de (2.5),  $-DK_{j+1}F = K_{j}F$ . La distribution  $\mathfrak{N}F$  est appelée transformée de Mellin inverse de F et  $\mathfrak{N}$  définit une application linéaire de  $\mathscr{H}_{+}$  dans  $\mathscr{E}'_{+}$ .

D'après (2.5),  $K_jF(t)$  est limite uniforme sur tout compact de  $\mathbb{R}_+$  des fonctions

$$t \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_{s-iA}^{s+iA} t^{-z} F(z) z^{-j} dz$$

lorsque A tend vers l'infini, avec s > r. Il en résulte que  $\mathfrak{N}F$  est limite dans  $\mathscr{D}'(\mathbf{R}_+)$  des fonctions continues

$$(2.7) t \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_{s-iA}^{s+iA} t^{-z} F(z) dz,$$

lorsque A tend vers l'infini, s > r.

PROPOSITION 2.2. Si  $F \in \mathcal{H}_+$ , les fonctions  $z \mapsto zF(z)$  et  $z \mapsto F(z+p)$ , avec  $p \in \mathbb{C}$ , appartiennent à  $\mathcal{H}_+$ . De plus

$$\mathfrak{N}\left[zF\left(z\right)\right] = -D\mathfrak{N}\left[F\left(z\right)\right],$$

(2.9) 
$$\Re \left[ F(z+p) \right] = t^p \Re \left[ F(z) \right], \quad p \in \mathbb{C}.$$

Démonstration. Il est clair que  $\mathcal{H}_+$  est invariant par multiplication par z et par translation dans C. Pour j assez grand, on a d'après (2.5)

$$\mathfrak{N}\left[zF(z)\right] = (-D)^{j+1} K_{j+1} \left[zF(z)\right] = (-D)^{j+1} K_{j} \left[F(z)\right]$$
$$= -D\mathfrak{N}\left[F(z)\right].$$

Pour k et j assez grands, on a de même

$$\mathfrak{N}[F(z)] = (-D)^{k} K_{k}[F(z)] = (-D)^{k} (-D+p)^{j} K_{k}[(z+p)^{-j}F(z)]$$
$$= (-D+p)^{j} K_{0}[(z+p)^{-j}F(z)],$$

et par suite

$$\Re [F(z+p)] = (-D+p)^{j} K_{0} [(z+p)^{-j} F(z+p)],$$

d'où, en faisant le changement de variable  $z + p \mapsto z$  dans l'intégrale (2.5) donnant  $K_0$ ,

$$\mathfrak{N}\left[F(z+p)\right] = (-D+p)^{j} \left(t^{p} K_{j} \left[F(z)\right]\right)$$
$$= t^{p} (-D)^{j} K_{j} \left[F(z)\right] = t^{p} \mathfrak{N}\left[F(z)\right],$$

c.q.f.d.

Théorème 2.3. La transformation de Mellin  $\mathfrak M$  est un isomorphisme de l'algèbre  $\mathscr E_+$  sur l'algèbre  $\mathscr H_+$  d'inverse  $\mathfrak N$ .

Démonstration. On sait déjà que  $\mathfrak{M}:\mathscr{E}_{+}^{'}\to\mathscr{H}_{+}$  est un homomorphisme.

Montrons que  $\mathfrak{NM}$  est l'identité sur  $\mathscr{E}'_+$ . Si  $T \in \mathscr{E}'_+$ , on a  $T = (-D)^m$   $(t^{-q} f)$  avec m et  $q \in \mathbb{N}$  et  $f \in C^0_+$  (proposition 1.5). Par suite (propo-

sition 2.1),  $\mathfrak{M}T(z) = z^m \, \mathfrak{M}f(z-q)$  et (proposition 2.2)  $\mathfrak{N}\mathfrak{M}T = (-D)^m (t^{-q} \, \mathfrak{N}\mathfrak{M}f)$ . Il suffit donc de vérifier que  $\mathfrak{N}\mathfrak{M}f = f$  pour  $f \in C_+^0$ . Mais alors  $\mathfrak{M}f$  satisfait à l'inégalité (2.4) avec m = 0 et  $\mathfrak{N}\mathfrak{M}f = D^2K_2Mf$ , c'est-à-dire, avec x > 0,

$$2\pi \, \mathfrak{M}\mathfrak{M}f = D^2 \int_{-\infty}^{+\infty} t^{-x-iy} \, \frac{\mathfrak{M}f(x+iy)}{(x+iy)^2} \, dy$$
$$= D^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dy \, \int_0^{\infty} \frac{t^{-x-iy} \, s^{x+iy-1}}{(x+iy)^2} f(s) \, ds,$$

intégrales absolument convergentes. En intégrant d'abord par rapport à y on obtient

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (s/t)^{x+iy} \frac{dy}{(x+iy)^2} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad s \leqslant t, \\ \log(s/t) & \text{si} \quad s \geqslant t. \end{cases}$$

On a donc  $\mathfrak{MM} f = D^2 \int_t^{\infty} \log (s/t) f(s) s^{-1} ds = f$ .

Montrons que  $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$  est l'identité sur  $\mathscr{H}_+$ . Si  $F \in \mathscr{H}_+$ , on a  $F(z) = z^m G(z)$  où G est holomorphe pour Re z > r et

$$|G(z)| \le C(1+|z|)^{-2} a^{\text{Re } z}, \quad \text{Re } z > r,$$

 $C, a ext{ et } r > 0, m \in \mathbb{N}$ . Il s'ensuit que  $\mathfrak{N}F = (-D)^m \mathfrak{N}G$  et  $\mathfrak{M}\mathfrak{N}F = z^m \mathfrak{M}\mathfrak{N}G$  (propositions 2.2 et 2.1), d'où le résultat si  $\mathfrak{M}\mathfrak{N}G = G$ . Or  $\mathfrak{N}G(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(u)} t^{-z} G(z) dz$ ,  $\gamma(u)$  droite  $\operatorname{Re} z = u$  avec u > r. Par suite,  $\mathfrak{N}G(t) = t^{-u} g(t)$  avec  $2\pi g(t) = \int t^{-iv} G(u+iv) dv$ . On a  $g \in C_+^0$ , supp  $g \subset [0,a]$  d'où

$$\mathfrak{MNG}(z) = \int_0^a t^{z-u-1} g(t) dt.$$

Pour x > u > r on a donc

$$\mathfrak{MMG}(x+iy) = \int_{0}^{a} t^{x+iy-u-1} g(t) dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{a} dt \int_{-\infty}^{+\infty} t^{x+iy-u-iv-1} G(u+iv) dv$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a^{x+iy-u-iv}}{x+iy-u-iv} G(u+iv) dv$$

= résidu au point z de la fonction 
$$w \mapsto \frac{G(w) a^{z-w}}{w-z}$$
  
=  $G(x+iy)$ .

Remarques. 1) Il résulte de ce qui précède que si  $T \in \mathscr{E}'_+$  et  $F = \mathfrak{M}T$   $\in \mathscr{H}_+$ , le support de T est contenu dans ]0, c] si et seulement si F vérifie une inégalité (2.4) avec a = c.

2) Si T est la restriction à  $\mathbf{R}_+$  d'une distribution d'ordre  $\leq n$  sur  $\mathbf{R}$ , F vérifie (2.4) avec m=n. Inversement si F vérifie (2.4),  $T=(-D)^{m+2}$   $K_{m+2}$  F est d'ordre  $\leq m+2$ . Des résultats plus précis seront obtenus au paragraphe suivant.

Etant donné une distribution T sur  $\mathbb{R}_+$ , on désigne par  $T_a$  l'homothétique de T dans le rapport a>0; avec la notation fonctionnelle, on a  $T_a(t)=T(a^{-1}t)$ . De même  $T^a$  est la distribution définie par  $T^a(t)=T(t^a)$ . On démontre sans difficulté la proposition suivante:

PROPOSITION 2.4. Soit a > 0. Si  $F \in \mathcal{H}_+$  les fonctions  $a^z F(z)$ ,  $F\left(\frac{z}{a}\right)$  et F'(z) appartiennent aussi à  $\mathcal{H}_+$ . Si  $T \in \mathcal{E}_+'$ , les distributions  $T_a$ ,  $T^a$  et  $(\log t)$  T appartiennent aussi à  $\mathcal{E}_+'$  et l'on a

$$\mathfrak{M}T_{a}(z) = a^{z} \, \mathfrak{M}T(z), \qquad \mathfrak{M}T^{a}(z) = \frac{1}{a} \, \mathfrak{M}T\left(\frac{z}{a}\right),$$
$$\mathfrak{M}\left[\left(\log t\right)T\right](z) = \frac{d}{dz} \, \mathfrak{M}T(z).$$

Exemples. 1) La mesure de Dirac  $\delta_1$  au point 1 est l'unité de l'algèbre  $\mathscr{E}_+$ .  $\mathfrak{M}\delta_1=1$  est l'unité de l'algèbre  $\mathscr{H}_+$ .

- 2) Dans  $\mathcal{H}_+$ , la multiplication par -z est un opérateur inversible dont l'inverse est la multiplication par  $-z^{-1}$ . On en déduit que l'opérateur différentiel D dans  $\mathcal{E}'_+$  admet un inverse  $D^{-1}$  qui est la convolution par  $\Re(-z^{-1}) = -\theta$ , avec  $\theta(t) = 1$  si 0 < t < 1 et = 0 si  $t \ge 1$ . En fait  $D^{-1}$  f est la primitive de  $t^{-1}$  f à support borné.
- 3) Plus généralement,  $P(z) = c (z-z_1)^{n_1} \dots (z-z_k)^{n_k}$  étant un polynôme de degré  $m = n_1 + \dots + n_k \geqslant 1$  à zéros  $z_1, \dots, z_k$  distincts, la multiplication par P(-z) dans  $\mathscr{H}_+$  est un opérateur d'inverse  $P(-z)^{-1}$ . Par transformation de Mellin inverse, on en déduit que l'opérateur différentiel P(D) est inversible dans  $\mathscr{E}'_+: P(D)^{-1}$  est la convolution par

$$(-1)^m c^{-1} \theta_{z_1,n_1} * \dots * \theta_{z_k,n_k}$$
,

où  $\theta_{w,n} = (-1)^{n-1} t^w (\log t)^{n-1} \theta/(n-1)!$  est la transformée de Mellin inverse de la fonction  $z \mapsto (z+w)^{-n}$ .

## 3. Théorèmes du type de Paley-Wiener

Théorème 3.1. Soit  $F \in \mathcal{H}_+$ .

1) F est la transformée de Mellin d'une distribution à support dans  $[a^{-1}, a]$   $(a \ge 1)$  si et seulement si F est entière et vérifie une inégalité

$$(3.1) |F(z)| \leq C(1+|z|)^m a^{|\operatorname{Re} z|}, z \in \mathbb{C},$$

avec  $m \in \mathbb{N}$  et C > 0.

2) F est la transformée de Mellin d'une fonction  $C^{\infty}$  à support dans  $[a^{-1}, a]$  (a>1) si et seulement si F est entière et, pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , il existe  $C_m > 0$  tel que

$$(3.2) |F(z)| \leq C_m (1+|z|)^{-m} a^{|\operatorname{Re} z|}, z \in \mathbb{C}.$$

Démonstration. (Voir aussi [6], pages 3 à 13, [7], théorème 16, page 272 et [3], théorème 1.7.7, page 21).

1) Soit T une distribution sur  $\mathbb{R}$  à support dans  $[a^{-1}, a]$ . Il existe  $m \in \mathbb{N}$  tel que T soit d'ordre  $\leq m$  et

(3.3) 
$$\left| \langle T, \varphi \rangle \right| \leqslant M \sum_{j=0}^{m} \sup_{t} \left| \varphi^{(j)}(t) \right|$$

pour tout  $\varphi \in C^m(\mathbf{R}_+)$ , avec M > 0. Soit  $\chi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}_+)$  égale à 1 au voisinage de  $[a^{-1}, a]$ . On a  $F(z) = \langle T, t^{z-1}\chi \rangle$  et F est entière. Soit  $\psi \in C^{\infty}(\mathbf{R})$  nulle pour  $t \geqslant 3$  et égale à 1 pour  $t \leqslant 2$ . Posons

$$\varphi_z(t) = \chi(t) \psi(t^{|z|} a^{-|z|}) \psi(t^{-|z|} a^{-|z|}) t^{z-1}.$$

On a  $\varphi_z \in C^{\infty}$  (R), et comme  $\varphi_z(t) = t^{z-1}$  au voisinage du support de T,  $F(z) = \langle T, \varphi_z \rangle$ . D'après (3.3), en majorant les dérivées de  $\varphi_z$ , on obtient (3.1).

Soit F entière vérifiant (3.1). On a  $F = \mathfrak{M}T$  avec  $T = \mathfrak{N}F = (-D)^{m+2} g_{\pm}$ , où