Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 25 (1979)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: TRANSFORMATION DE MELLIN ET DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES

Autor: Jeanquartier, Pierre

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-50384

TRANSFORMATION DE MELLIN ET DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES

par Pierre JEANQUARTIER

1. INTRODUCTION

La transformée de Mellin d'une fonction f intégrable à support compact sur $\mathbf{R}_+ =]\,0, \infty\,[$ est la fonction entière $\mathfrak{M}f$ définie par

$$\mathfrak{M}f\,(z) = \int_0^\infty f\,(t)\, t^{z-1}\, dt\,. \tag{1.1}$$

Lorsqu'on se propose d'étendre la définition (1.1) au cas d'une fonction localement intégrable ou plus généralement d'une distribution f sur $\mathbf{R}_+$, des conditions de croissance au voisinage de 0 et de ∞ doivent être imposées à f. Comme la transformation $t \mapsto t^{-1}$ échange des voisinages de 0 et de l'infini, on ne restreint pas la généralité en ne considérant que des distributions nulles au voisinage de l'infini. En fait, on définira la transformation de Mellin $\mathfrak{M}$ dans l'espace $\mathscr{E}'_+$ des distributions sur $\mathbf{R}_+$ qui sont restriction de distributions à support compact sur $\mathbf{R}$. $\mathfrak{M}$ est alors un isomorphisme de $\mathscr{E}'_+$, considéré comme algèbre de convolution, sur une algèbre multiplicative $\mathscr{H}_+$ de fonctions holomorphes dans des demi-plans $\operatorname{Re} z > r$, satisfaisant à une condition de croissance. Deux théorèmes du type de Paley-Wiener permettent de caractériser par leur transformée de Mellin les distributions à support compact et les fonctions de carré intégrable par rapport à la mesure $t^{-1}\, dt$. Comme application, on définit des sous-espaces $\mathscr{E}^s_r$ de $\mathscr{E}'_+$, analogues aux espaces de Sobolev, conduisant à une classification des distributions en fonction de leur régularité et de leur ordre de grandeur au voisinage de l'origine. Ces espaces permettent de définir des développements asymptotiques en un sens généralisé au voisinage de l'origine, et de caractériser, par des propriétés de méromorphie et de croissance, les transformées de Mellin de distributions admettant de tels développements. A titre d'exemple, on reprend les résultats d'Atiyah [1] sur la méromorphie de l'application $z \mapsto A_+^{z-1}$, A étant une fonction analytique réelle sur une variété. Cette application, qui est la transformée de Mellin de l'application

$t \mapsto \delta_t(A)$, $\delta_t(A)$ étant l'image réciproque par A de la mesure de Dirac au point t, vérifie les conditions pour que ce soit la transformée d'une application admettant un développement asymptotique; on retrouve ainsi le résultat de [4] sur l'existence d'un développement asymptotique pour $\delta_t(A)$ lorsque t tend vers zéro.

Il est à peine nécessaire de signaler que le présent travail ne contient rien de vraiment original puisque la plupart des résultats qu'il présente figurent, sous des formes plus ou moins équivalentes, dans l'abondante littérature consacrée aux transformations intégrales, notamment aux transformations de Laplace et de Mellin (voir par exemple [6], [2], [7], [8], [3] et [9]). Toutefois, sa publication n'a pas paru inutile vu que le mode d'exposition choisi est bien adapté à la transformation de Mellin et à son application à l'étude du comportement d'une distribution au voisinage de l'origine. C'est d'ailleurs l'emploi fructueux que [5] fait de cette transformation qui a motivé la rédaction de ce texte, et l'auteur tient à préciser qu'il s'est particulièrement inspiré du travail de diplôme de H.-M. Maire (non publié) et de [5].

Notations. On désigne par $\mathbf{R}_+$ la demi-droite *ouverte* $]0, \infty[$. Sur $\mathbf{R}$, la fonction t_+^z $(z \in \mathbf{C})$ est nulle pour $t \leqslant 0$ et égale à t^z pour $t > 0$. Pour $m \in \mathrm{N}$ (ensemble des entiers $\geqslant 0$), C_+^m est l'espace des fonctions de classe C^m sur $\mathbf{R}_+$, à support borné, qui sont prolongeables en fonctions C^m sur $\mathbf{R}$.

Si U est un ouvert de $\mathbf{R}^n$, $\mathscr{D}(U)$ est l'espace des fonctions C^∞ à support compact dans U; son dual $\mathscr{D}'(U)$ est l'espace des distributions dans U. La valeur de $T \in \mathscr{D}'(U)$ pour $\varphi \in \mathscr{D}(U)$ est notée $\langle T, \varphi \rangle$.

On utilisera souvent l'opérateur $D = t \dfrac{d}{dt}$ invariant par les homothéties de $\mathbf{R}_+$. La démonstration du lemme suivant est immédiate:

Lemme 1.1. *Pour tout entier* $m \geqslant 1$, *il existe des constantes* $a_j^m > 0$ *et* b_j^m, $1 \leqslant j \leqslant m$, *avec* $a_m^m = b_m^m = 1$, *telles que*

$$D^m f = \sum_{j=1}^{m} a_j^m t^j f^{(j)}, \tag{1.2}$$

$$t^m f^{(m)} = \sum_{j=1}^{m} b_j^m D^j f, \tag{1.3}$$

pour toute distribution f *sur* $\mathbf{R}$.

LEMME 1.2. *Soit* $f \in C_+^0$, $p \in \mathbf{C}$ *et* $m \in \mathbf{N}$. *Si* $\mathrm{Re}\, p + k > 0$, *avec* $k \in \mathbf{N}$, *il existe* $g \in C_+^0$ *unique tel que, dans* $\mathscr{D}'(\mathbf{R}_+)$, $t^p f^{(m)} = g^{(m+k)}$.

Démonstration. Cas $m = 0$: Le résultat est évident si $k = 0$. Si $k > 0$, il suffit de prendre

$$g(t) = \int_\infty^t \frac{(t-u)^{k-1}}{(k-1)!} f(u)\, u^p\, du\,, \qquad t > 0\,.$$

Supposons le résultat vrai pour m remplacé par $m - 1$. On a

$$t^p f^{(m)} = (t^p f^{(m-1)})' - p\, t^{p-1} f^{(m-1)}\,.$$

Par hypothèse

$$t^p f^{(m-1)} = g_1{}^{(m+k-1)}\,, \qquad t^{p-1} f^{(m-1)} = g_2{}^{(m+k)}\,,$$

avec $g_1, g_2 \in C_+^0$. On a donc $t^p f^{(m)} = g^{(m+k)}$ avec $g = g_1 - p\, g_2 \in C_+^0$.
L'unicité de g résulte de ce que son support est borné.

LEMME 1.3. *Soit* $f \in C_+^0$ *et* $m \geqslant 1$ *entier. Il existe des fonctions* g_0, g_m *et* h_m *uniques dans* C_+^0 *telles que, dans* $\mathscr{D}'(\mathbf{R}_+)$,

(1.4) $$f = D(t^{-1} g_0)\,,$$

(1.5) $$t^{-m} f = D(t^{-m} g_m)\,,$$

(1.6) $$D^m(t^{1-m} f) = t\, D^m(t^{-m} h_m)\,.$$

Démonstration. Pour (1.4) et (1.5), il suffit de prendre

$$g_0(t) = t \int_\infty^t f(u)\, u^{-1}\, du\,, \qquad g_m(t) = \int_\infty^1 f(ts)\, s^{-m-1}\, ds\,.$$

Pour prouver (1.6), on utilise la formule de Leibniz:

$$D^m(t^{1-m} f) = t\, D^m(t^{-m} f) + \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m}{j}\, t\, D^j(t^{-m} f)\,.$$

D'après (1.5), il existe $f_j \in C_+^0$ telle que $D^j(t^{-m} f) = D^m(t^{-m} f_j)$. On a donc (1.6) avec

$$h_m = f + \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m}{j} f_j\,.$$

L'unicité provient de ce que les fonctions cherchées sont à support borné.

Lemme 1.4. *Etant donné* $f \in C_+^0$ et $m \in \mathbf{N}$, *il existe* $g \in C_+^0$ *unique tel que, dans* $\mathscr{D}'(\mathbf{R}_+)$, $f^{(m)} = D^m(t^{-m} g)$.

Démonstration. Le résultat est vrai pour $m = 0$. Si $m > 0$, on a $f^{(m)} = t^{-1} D f^{(m-1)}$ où l'on peut supposer, par récurrence, que $f^{(m-1)} = D^{m-1}(t^{-m+1} h)$, avec $h \in C_+^0$. D'après le lemme 1.3 on a donc $f^{(m)} = t^{-1} D^m (t^{-m+1} h) = D^m (t^{-m} g)$, avec $g \in C_+^0$. g est unique puisque nulle au voisinage de l'infini.

Espace $\mathscr{E}'_+$. $\mathscr{E}'_+$ est le sous-espace de $\mathscr{D}'(\mathbf{R}_+)$ formé des distributions qui sont prolongeables en distributions à support compact sur $\mathbf{R}$.

Proposition 1.5. *Soit* $T \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}_+)$. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1) $T \in \mathscr{E}'_+$.

2) *Il existe* $m \in \mathbf{N}$ *et* $f \in C_+^0$ *tels que* $T = f^{(m)}$.

3) *Il existe* $m, q \in \mathbf{N}$ *et* $g \in C_+^0$ *tels que* $T = D^m(t^{-q} g)$.

Démonstration. 1) et 2) sont équivalents: Si $T \in \mathscr{E}'_+$, il existe une fonction f_1 continue sur $\mathbf{R}$ et $m \in \mathbf{N}$ tels que $f_1^{(m)}$ soit un prolongement de T ([7], théorème 26, page 91). En ajoutant un polynôme de degré $< m$ à f_1, on peut supposer que cette fonction est nulle au voisinage de $+\infty$. Alors $T = f^{(m)}$ où $f \in C_+^0$ est la restriction de f_1 à $\mathbf{R}_+$. Inversement, si $T = f^{(m)}$ avec $f \in C_+^0$, T est la restriction de $f_1^{(m)}$ où f_1 est un prolongement continu à support compact de f, donc $T \in \mathscr{E}'_+$.

2) entraîne 3) d'après le lemme 1.4.

3) entraîne 1) car si $f \in C_+^0$, $t^{-q} f \in \mathscr{E}'_+$ en vertu du lemme 1.2 et par conséquent $D^m(t^{-q} f) \in \mathscr{E}'_+$.

Lemme 1.6. *Soit* $F(z)$ *une fonction holomorphe dans la bande* $a < \operatorname{Re} z < b$ *et telle que* $\int |F(x+iy)|^2 dy \leqslant M^2$ *pour* $a < x < b$. *Alors, si* $r > 0$, $|F(z)| \leqslant M(\pi r)^{-1/2}$ *pour* $a+r < \operatorname{Re} z < b-r$.

Démonstration. (Voir aussi [6], théorème 3, page 5). Prenons $z = x+iy$ tel que $a+r < x < b-r$. On a

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta(s)} \frac{F(w)}{w-z} dw,$$

$\delta(s)$ étant le rectangle $x+r-is$, $x+r+is$, $x-r+is$, $x-r-is$, où $s > |y|$. Si γ est un des côtés du rectangle parallèle à l'axe imaginaire, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\left| \int_\gamma \frac{F(w)}{w-z}\, dw \right|^2 \leqslant M^2 \int \frac{dv}{r^2 + (v-y)^2} = M^2 \pi / r .$$

Soit $I(s) = \int_{\sigma(s)} \frac{F(w)}{w-z}\, dw$, $\sigma(s)$ étant le segment $x-r+is$, $x+r+is$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|I(s)|^2 \leqslant \int_{x-r}^{x+r} |F(u+is)|^2\, du \int_{x-r}^{x+r} \frac{du}{(u-x)^2 + (s-y)^2}$$

$$\leqslant \pi \int_{x-r}^{x+r} |F(u+is)|^2\, du ,$$

en supposant $|s| \geqslant |y| + 1$. Par conséquent

$$\int_{|y|+1}^{\infty} (|I(s)|^2 + |I(-s)|^2)\, ds \leqslant 2\pi r\, M^2 .$$

Il existe donc une suite (s_j) convergeant vers $+\infty$ et telle que $|I(s_j)|^2 + |I(-s_j)|^2$ tende vers 0 lorsque $j \to \infty$. On a donc $2\pi\, |F(z)| \leqslant 2\, \mathrm{M}\, (\pi/r)^{1/2} + |I(s_j)| + |I(-s_j)|$ pour tout j, d'où le résultat lorsque $j \to \infty$

2. La transformation de Mellin et son inverse

Transformation de Mellin. Si $T \in \mathscr{E}'_+$, soit T_1 une distribution à support compact sur $\mathbf{R}$ qui prolonge T. Il existe un entier $m \geqslant 0$ tel que T_1 soit d'ordre fini $\leqslant m$ (cf. [7] théorème 24, page 88). Par conséquent, la fonction de z donnée par $F(z) = \langle T_1, t_+^{z-1} \rangle$ est définie et holomorphe pour $\operatorname{Re} z > m + 1$ et elle ne dépend pas du prolongement T_1 de T choisi. En effet, d'une part l'application $z \mapsto t_+^{z-1}$ définit une fonction holomorphe pour $\operatorname{Re} z > m + 1$, à valeurs dans l'espace des fonctions de classe C^m sur $\mathbf{R}$; d'autre part, si T_2 est un autre prolongement de T, pour $\operatorname{Re} z$ assez grand, t_+^{z-1} est nul sur le support de $T_1 - T_2$ ainsi que ses dérivées d'ordre inférieur ou égal à l'ordre de $T_1 - T_2$ (cf. [7] théorème 28, page 93). La fonction F est appelée *transformée de Mellin* de T et notée $F = \mathfrak{M}T$.

PROPOSITION 2.1. *Si* $T \in \mathscr{E}'_+$, *on a* $DT \in \mathscr{E}'_+$ *et* $t^p T \in \mathscr{E}'_+$ *pour tout* $p \in \mathbf{C}$. *De plus*

$$\mathfrak{M}(DT)(z) = -z\mathfrak{M}T(z), \tag{2.1}$$

$$\mathfrak{M}(t^p T)(z) = \mathfrak{M}T(z+p). \tag{2.2}$$

Démonstration. Si $T \in \mathscr{E}'_+$, il est clair que $DT \in \mathscr{E}'_+$. Le lemme 1.2 et la proposition 1.5 montrent que $t^p T \in \mathscr{E}'_+$ si $p \in \mathbf{C}$.

Soit T_1 une distribution à support compact, d'ordre $\leqslant m$, qui prolonge T. Pour $\operatorname{Re} z > m + 2$, on a $z\mathfrak{M}T(z) = \langle T_1, zt_+^{z-1} \rangle = -\langle T_1', t_+^z \rangle = -\langle DT_1, t_+^{z-1} \rangle = -\mathfrak{M}(DT)(z)$, puisque DT_1 est un prolongement de DT.

Soit maintenant k un entier $\geqslant 0$ tel que $\operatorname{Re} p + k > m$. Alors t_+^{p+k} est de classe C^m et $t_+^{p+k} T_1$ est un prolongement de $S = t^{p+k} T$; on a donc, pour $\operatorname{Re} z > m + 1$, $\mathfrak{M}S(z) = \langle t_+^{p+k} T_1, t_+^{z-1} \rangle = \langle T_1, t_+^{z+p+k-1} \rangle = \mathfrak{M}T(z+p+k)$. En outre, $S = t^k t^p T$, de sorte que si T_2 est un prolongement de $t^p T$, $t^k T_2$ est un prolongement de S; par suite, pour $\operatorname{Re} z$ assez grand, $\mathfrak{M}S(z) = \langle t^k T_2, t_+^{z-1} \rangle = \langle T_2, t_+^{z+k-1} \rangle = \mathfrak{M}(t^p T)(z+k)$. Finalement, $\mathfrak{M}(t^p T)(z) = \mathfrak{M}S(z-k) = \mathfrak{M}T(z+p)$, c.q.f.d.

ALGÈBRE $\mathscr{E}'_+$. Si S et T appartiennent à $\mathscr{E}'_+$, on définit la convolution $S * T$ de S et T comme la distribution sur $\mathbf{R}_+$ donnée par

$$\langle S * T, \varphi \rangle = \langle S(s) \otimes T(t), \varphi(st) \rangle, \qquad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}_+). \tag{2.3}$$

C'est la convolution associée à la structure de groupe multiplicatif de $\mathbf{R}_+$. On a $S * T \in \mathscr{E}'_+$; en effet, si S_1 et T_1 sont des prolongements respectifs de S et T, $S*T$ est la restriction de $S_1 * T_1$ définie sur $\mathbf{R}$ par une formule analogue à (2.3). Muni de la convolution, $\mathscr{E}'_+$ est une algèbre commutative sur le corps $\mathbf{C}$.

ALGÈBRE $\mathscr{H}_+$. Nous considérerons des fonctions holomorphes définies dans des domaines du plan $\mathbf{C}$ contenant des demi-plans du type $\operatorname{Re} z > r$ $(r \in \mathbf{R})$. Deux telles fonctions seront identifiées si elles coïncident dans un tel demi-plan. Nous désignerons par $\mathscr{H}_+$ l'espace des (classes de) fonctions F du type précédent vérifiant une inégalité

$$|F(z)| \leqslant C(1+|z|)^m a^{\operatorname{Re} z}, \quad \operatorname{Re} z > r, \tag{2.4}$$

où les constantes $C > 0$, $m \in \mathbf{Z}$, $a > 0$ et $r \in \mathbf{R}$ dépendent de F. $\mathscr{H}_+$ est une algèbre pour le produit $FG : z \to F(z)\, G(z)$, $F, G \in \mathscr{H}_+$.

Par exemple, si $T \in \mathscr{E}'_+$, la transformée de Mellin $F = \mathfrak{M}T$ de T appartient à $\mathscr{H}_+$. En effet, si le support de T est contenu dans $]0, a]$, il existe $f \in C^0_+$ nulle pour $t \geqslant a$ et $m \in \mathbf{N}$ tels que $T = f^{(m)}$ (proposition 1.5); par suite

$$\mathfrak{M}T(z) = (-1)^m (z-1)(z-2) \dots (z-m) \int_0^a f(t)\, t^{z-m-1}\, dt$$

vérifie (2.4) avec $r > m$.

On vérifie sans peine que $\mathfrak{M}$ est un homomorphisme de l'algèbre $\mathscr{E}'_+$ dans l'algèbre $\mathscr{H}_+$.

Transformation de Mellin inverse. Soit $F \in \mathscr{H}_+$ vérifiant (2.4). Si j est un entier $\geqslant 0$ tel que $j > m+1$, posons pour $t > 0$

$$K_j F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(s)} t^{-z} F(z)\, z^{-j}\, dz\,, \tag{2.5}$$

où $\gamma(s)$ désigne la droite $\operatorname{Re} z = s$ orientée dans le sens $\operatorname{Im} z$ croissant, avec $s > r$ (on peut supposer $r > 0$). Il est clair que $K_j F$ est une fonction continue sur $\mathbf{R}_+$ ne dépendant pas de $s > r$. D'autre part, si $x > r$,

$$2\pi\, t^x\, K_j F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy \log t}\, F(x+iy)\, (x+iy)^{-j}\, dy\,,$$

où l'intégrale tend vers 0 lorsque $t \to +0$, d'après le lemme de Riemann-Lebesgue. Il s'ensuit que $t^x K_j F$ est continue sur $\overline{\mathbf{R}}_+$ si $x > r$. Enfin, d'après (2.4), $|K_j F(t)| \leqslant M(a/t)^x$ pour x assez grand, où M est une constante positive; par conséquent, en faisant tendre x vers l'infini, on obtient que $K_j F(t)$ est nul pour $t > a$ et $K_j F \in C^0_+$.

On définit donc un élément $\mathfrak{N}F$ de $\mathscr{E}'_+$ en posant, pour $j > m+1$,

$$\mathfrak{N}F = (-D)^j\, K_j F\,, \tag{2.6}$$

et $\mathfrak{N}F$ ne dépend pas de j puisque, en vertu de (2.5), $-DK_{j+1}F = K_j F$. La distribution $\mathfrak{N}F$ est appelée *transformée de Mellin inverse* de F et $\mathfrak{N}$ définit une application linéaire de $\mathscr{H}_+$ dans $\mathscr{E}'_+$.

D'après (2.5), $K_j F(t)$ est limite uniforme sur tout compact de $\mathbf{R}_+$ des fonctions

$$t \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_{s-iA}^{s+iA} t^{-z} F(z)\, z^{-j}\, dz$$

lorsque A tend vers l'infini, avec $s > r$. Il en résulte que $\mathfrak{N}F$ est limite dans $\mathscr{D}'(\mathbf{R}_+)$ des fonctions continues

$$t \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_{s-iA}^{s+iA} t^{-z} F(z)\, dz\,, \tag{2.7}$$

lorsque A tend vers l'infini, $s > r$.

PROPOSITION 2.2. *Si* $F \in \mathscr{H}_+$, *les fonctions* $z \mapsto zF(z)$ *et* $z \mapsto F(z+p)$, *avec* $p \in \mathbf{C}$, *appartiennent à* $\mathscr{H}_+$. *De plus*

$$\mathfrak{N}[zF(z)] = -D\mathfrak{N}[F(z)]\,, \tag{2.8}$$

$$\mathfrak{N}[F(z+p)] = t^p \mathfrak{N}[F(z)]\,, \quad p \in \mathbf{C}\,. \tag{2.9}$$

Démonstration. Il est clair que $\mathscr{H}_+$ est invariant par multiplication par z et par translation dans $\mathbf{C}$. Pour j assez grand, on a d'après (2.5)

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}[zF(z)] &= (-D)^{j+1} K_{j+1}[zF(z)] = (-D)^{j+1} K_j [F(z)] \\ &= -D\mathfrak{N}[F(z)]\,. \end{aligned}$$

Pour k et j assez grands, on a de même

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}[F(z)] &= (-D)^k K_k [F(z)] = (-D)^k (-D+p)^j K_k [(z+p)^{-j} F(z)] \\ &= (-D+p)^j K_0 [(z+p)^{-j} F(z)]\,, \end{aligned}$$

et par suite

$$\mathfrak{N}[F(z+p)] = (-D+p)^j K_0 [(z+p)^{-j} F(z+p)]\,,$$

d'où, en faisant le changement de variable $z + p \mapsto z$ dans l'intégrale (2.5) donnant K_0,

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}[F(z+p] &= (-D+p)^j (t^p K_j [F(z)]) \\ &= t^p (-D)^j K_j [F(z)] = t^p \mathfrak{N}[F(z)]\,, \end{aligned}$$

c.q.f.d.

THÉORÈME 2.3. *La transformation de Mellin* $\mathfrak{M}$ *est un isomorphisme de l'algèbre* $\mathscr{E}'_+$ *sur l'algèbre* $\mathscr{H}_+$ *d'inverse* $\mathfrak{N}$.

Démonstration. On sait déjà que $\mathfrak{M} : \mathscr{E}'_+ \to \mathscr{H}_+$ est un homomorphisme.

Montrons que $\mathfrak{N}\mathfrak{M}$ est l'identité sur $\mathscr{E}'_+$. Si $T \in \mathscr{E}'_+$, on a $T = (-D)^m (t^{-q} f)$ avec m et $q \in \mathbf{N}$ et $f \in C^0_+$ (proposition 1.5). Par suite (proposition 2.1), $\mathfrak{M}T(z) = z^m \mathfrak{M}f\,(z-q)$ et (proposition 2.2) $\mathfrak{N}\mathfrak{M}T = (-D)^m$ $(t^{-q}\,\mathfrak{N}\mathfrak{M}f)$. Il suffit donc de vérifier que $\mathfrak{N}\mathfrak{M}f = f$ pour $f \in C_+^0$. Mais alors $\mathfrak{M}f$ satisfait à l'inégalité (2.4) avec $m = 0$ et $\mathfrak{N}\mathfrak{M}f = D^2K_2Mf$, c'est-à-dire, avec $x > 0$,

$$2\pi\,\mathfrak{N}\mathfrak{M}f = D^2 \int_{-\infty}^{+\infty} t^{-x-iy}\,\frac{\mathfrak{M}f\,(x+iy)}{(x+iy)^2}\,dy$$

$$= D^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_0^{\infty} \frac{t^{-x-iy}\,s^{x+iy-1}}{(x+iy)^2} f\,(s)\,ds\,,$$

intégrales absolument convergentes. En intégrant d'abord par rapport à y on obtient

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} (s/t)^{x+iy}\,\frac{dy}{(x+iy)^2} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad s \leqslant t\,, \\ \log(s/t) & \text{si} \quad s \geqslant t\,. \end{cases}$$

On a donc $\mathfrak{N}\mathfrak{M}f = D^2 \int_t^{\infty} \log\,(s/t)\;f\,(s)\;s^{-1}\,ds = f$.

Montrons que $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ est l'identité sur $\mathscr{H}_+$. Si $F \in \mathscr{H}_+$, on a $F(z) = z^m G(z)$ où G est holomorphe pour $\operatorname{Re} z > r$ et

$$|\,G(z)\,| \leqslant C\,(1+|z|)^{-2}\,a^{\operatorname{Re} z}\,, \qquad \operatorname{Re} z > r\,,$$

C, a et $r > 0$, $m \in \mathbf{N}$. Il s'ensuit que $\mathfrak{N}F = (-D)^m\,\mathfrak{N}G$ et $\mathfrak{M}\mathfrak{N}F = z^m\,\mathfrak{M}\mathfrak{N}G$ (propositions 2.2 et 2.1), d'où le résultat si $\mathfrak{M}\mathfrak{N}G = G$. Or $\mathfrak{N}G\,(t) = \frac{1}{2\pi i}$ $\int_{\gamma(u)} t^{-z}\,G\,(z)\,dz$, $\gamma\,(u)$ droite $\operatorname{Re} z = u$ avec $u > r$. Par suite, $\mathfrak{N}G\,(t)$ $= t^{-u}\,g\,(t)$ avec $2\pi g\,(t) = \int t^{-iv}\,G\,(u+iv)\,dv$. On a $g \in C_+^0$, supp g $\subset\,]0, a]$ d'où

$$\mathfrak{M}\mathfrak{N}G\,(z) = \int_0^a t^{z-u-1}\,g\,(t)\,dt\,.$$

Pour $x > u > r$ on a donc

$$\mathfrak{M}\mathfrak{N}G\,(x+iy) = \int_0^a t^{x+iy-u-1}\,g\,(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^a dt \int_{-\infty}^{+\infty} t^{x+iy-u-iv-1}\;G\,(u+iv)\,dv$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a^{x+iy-u-iv}}{x+iy-u-iv}\,G\,(u+iv)\,dv$$

$$= \text{résidu au point } z \text{ de la fonction } w \mapsto \frac{G(w)\, a^{z-w}}{w-z}$$
$$= G(x+iy)\,.$$

Remarques. 1) Il résulte de ce qui précède que si $T \in \mathscr{E}'_+$ et $F = \mathfrak{M}T \in \mathscr{H}_+$, le support de T est contenu dans $]0, c]$ si et seulement si F vérifie une inégalité (2.4) avec $a = c$.

2) Si T est la restriction à $\mathbf{R}_+$ d'une distribution d'ordre $\leqslant n$ sur $\mathbf{R}$, F vérifie (2.4) avec $m = n$. Inversement si F vérifie (2.4), $T = (-D)^{m+2} K_{m+2} F$ est d'ordre $\leqslant m+2$. Des résultats plus précis seront obtenus au paragraphe suivant.

Etant donné une distribution T sur $\mathbf{R}_+$, on désigne par T_a l'homothétique de T dans le rapport $a > 0$; avec la notation fonctionnelle, on a $T_a(t) = T(a^{-1}t)$. De même T^a est la distribution définie par $T^a(t) = T(t^a)$. On démontre sans difficulté la proposition suivante:

Proposition 2.4. *Soit* $a > 0$. *Si* $F \in \mathscr{H}_+$ *les fonctions* $a^z F(z)$, $F\left(\dfrac{z}{a}\right)$ *et* $F'(z)$ *appartiennent aussi à* $\mathscr{H}_+$. *Si* $T \in \mathscr{E}'_+$, *les distributions* T_a, T^a *et* $(\log t)\, T$ *appartiennent aussi à* $\mathscr{E}'_+$ *et l'on a*

$$\mathfrak{M}T_a(z) = a^z\, \mathfrak{M}T(z)\,, \qquad \mathfrak{M}T^a(z) = \frac{1}{a}\, \mathfrak{M}T\left(\frac{z}{a}\right),$$
$$\mathfrak{M}\big[(\log t)\, T\big](z) = \frac{d}{dz}\, \mathfrak{M}T(z)\,.$$

Exemples. 1) La mesure de Dirac δ_1 au point 1 est l'unité de l'algèbre $\mathscr{E}'_+$. $\mathfrak{M}\delta_1 = 1$ est l'unité de l'algèbre $\mathscr{H}_+$.

2) Dans $\mathscr{H}_+$, la multiplication par $-z$ est un opérateur inversible dont l'inverse est la multiplication par $-z^{-1}$. On en déduit que l'opérateur différentiel D dans $\mathscr{E}'_+$ admet un inverse D^{-1} qui est la convolution par $\mathfrak{N}(-z^{-1}) = -\theta$, avec $\theta(t) = 1$ si $0 < t < 1$ et $= 0$ si $t \geqslant 1$. En fait $D^{-1} f$ est la primitive de $t^{-1} f$ à support borné.

3) Plus généralement, $P(z) = c\,(z-z_1)^{n_1} \ldots (z-z_k)^{n_k}$ étant un polynôme de degré $m = n_1 + \ldots + n_k \geqslant 1$ à zéros $z_1, \ldots, z_k$ distincts, la multiplication par $P(-z)$ dans $\mathscr{H}_+$ est un opérateur d'inverse $P(-z)^{-1}$. Par transformation de Mellin inverse, on en déduit que l'opérateur différentiel $P(D)$ est inversible dans $\mathscr{E}'_+$: $P(D)^{-1}$ est la convolution par

$$(-1)^m c^{-1} \theta_{z_1,n_1} * \ldots * \theta_{z_k,n_k},$$

où $\theta_{w,n} = (-1)^{n-1} t^w (\log t)^{n-1} \theta/(n-1)!$ est la transformée de Mellin inverse de la fonction $z \mapsto (z+w)^{-n}$.

3. Théorèmes du type de Paley-Wiener

Théorème 3.1. *Soit* $F \in \mathscr{H}_+$.

1) *F est la transformée de Mellin d'une distribution à support dans $[a^{-1}, a]$ $(a \geqslant 1)$ si et seulement si F est entière et vérifie une inégalité*

$$|F(z)| \leqslant C(1+|z|)^m a^{|\mathrm{Re}\, z|}, \qquad z \in \mathbf{C}, \tag{3.1}$$

avec $m \in \mathbf{N}$ et $C > 0$.

2) *F est la transformée de Mellin d'une fonction C^∞ à support dans $[a^{-1}, a]$ $(a > 1)$ si et seulement si F est entière et, pour tout $m \in \mathbf{N}$, il existe $C_m > 0$ tel que*

$$|F(z)| \leqslant C_m (1+|z|)^{-m} a^{|\mathrm{Re}\, z|}, \qquad z \in \mathbf{C}. \tag{3.2}$$

Démonstration. (Voir aussi [6], pages 3 à 13, [7], théorème 16, page 272 et [3], théorème 1.7.7, page 21).

1) Soit T une distribution sur $\mathbf{R}$ à support dans $[a^{-1}, a]$. Il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que T soit d'ordre $\leqslant m$ et

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leqslant M \sum_{j=0}^{m} \sup_t |\varphi^{(j)}(t)| \tag{3.3}$$

pour tout $\varphi \in C^m(\mathbf{R}_+)$, avec $M > 0$. Soit $\chi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}_+)$ égale à 1 au voisinage de $[a^{-1}, a]$. On a $F(z) = \langle T, t^{z-1}\chi \rangle$ et F est entière. Soit $\psi \in C^\infty(\mathbf{R})$ nulle pour $t \geqslant 3$ et égale à 1 pour $t \leqslant 2$. Posons

$$\varphi_z(t) = \chi(t)\, \psi(t^{|z|} a^{-|z|})\, \psi(t^{-|z|} a^{-|z|})\, t^{z-1}.$$

On a $\varphi_z \in C^\infty(\mathbf{R})$, et comme $\varphi_z(t) = t^{z-1}$ au voisinage du support de T, $F(z) = \langle T, \varphi_z \rangle$. D'après (3.3), en majorant les dérivées de φ_z, on obtient (3.1).

Soit F entière vérifiant (3.1). On a $F = \mathfrak{M}T$ avec $T = \mathfrak{N}F = (-D)^{m+2} g_\pm$, où

$$g_\pm(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(s)} t^{-z} F(z)\, z^{-(m+2)}\, dz\,,$$

$\gamma(s)$ étant la droite $\operatorname{Re} z = s$ orientée dans le sens $\operatorname{Im} z$ croissant, avec $\pm s > 0$; cela résulte de la définition de $\mathfrak{M}$ si $s > 0$, et provient du fait que $g_+ - g_-$ est un polynôme en $\log t$ de degré $\leqslant m + 1$ si $s < 0$. L'inégalité (3.1) entraîne

$$|g_\pm(t)| \leqslant A\, a^{|s|}\, t^{-s}$$

lorsque $|s| > 1$, A constante > 0. En faisant tendre s vers $+\infty$ ou $-\infty$ on obtient $g_+(t) = 0$ pour $t > a$ et $g_-(t) = 0$ pour $t < a^{-1}$, de sorte que le support de T est contenu dans $[a^{-1}, a]$.

2) Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}_+)$ une fonction à support dans $[a^{-1}, a]$. Il est clair que $F = \mathfrak{M}\varphi$ est une fonction entière et que, pour tout entier $k \geqslant 0$,

$$|z^k F(z)| = \left|\int_{a^{-1}}^{a} D^k \varphi(t)\, t^{z-1}\, dt\right| \leqslant A_k\, a^{|\operatorname{Re} z|}\,,$$

A_k constante positive, d'où l'inégalité (3.2).

Inversement, si F entière vérifie (3.2) pour tout $m \in \mathbf{N}$, on a $F = \mathfrak{M}\varphi$, où $\varphi(t) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\gamma(s)} t^{-z} F(z)\, dz$ est une fonction C^∞, à support dans $[a^{-1}, a]$ d'après 1), c.q.f.d.

Espaces $\mathscr{E}$ et $\mathscr{H}$. Dans la suite, nous désignerons par $\mathscr{E}$ le sous-espace de $L^2(\mathbf{R}_+, t^{-1}\, dt)$ formé des fonctions à support borné, muni de la norme

$$\|f\|_{\mathscr{E}} = \left(\int_0^\infty |f(t)|^2\, t^{-1}\, dt\right)^{1/2}, \qquad f \in \mathscr{E}\,.$$

Il est clair que $\mathscr{E} \subset \mathscr{E}'_+ \cap L^1(\mathbf{R}_+) \cap L^2(\mathbf{R}_+)$.

Par exemple, si f est une fonction de carré intégrable à support borné telle que $|f(t) - f(0)| \leqslant C\, t^\alpha$ lorsque $t \to +0$, avec C et $\alpha > 0$, on a $f \in \mathscr{E}$ si et seulement si $f(0) = 0$.

Le théorème suivant caractérise l'espace $\mathscr{H} = \mathfrak{M}\mathscr{E}$:

Théorème 3.2. *Pour qu'une fonction* F *soit la transformée de Mellin d'une fonction* $f \in \mathscr{E}$ *à support dans* $]0, a]$ $(a > 0)$, *il faut et il suffit que les conditions suivantes soient satisfaites :*

1) *F est holomorphe dans le demi-plan* $\operatorname{Re} z > 0$,

2) *la fonction* $F_x : y \mapsto F(x+iy)$ *appartient à* $L^2(R)$ *pour tout* $x > 0$ *et il existe une constante* $C > 0$ *telle que*

$$\| F_x \|_{L^2(\mathbf{R})} \leqslant C a^x , \qquad \textit{pour tout } x > 0 .$$

Si les conditions précédentes sont vérifiées, F_x *tend vers une limite* F_0 *dans* $L^2(R)$ *lorsque* $x \to +0$ *et*

$$\| F_x \|_{L^2(\mathbf{R})} = \sqrt{2\pi} \| t^x f \|_{\mathscr{E}} \qquad \textit{pour tout } x \geqslant 0 . \tag{3.4}$$

Démonstration. (Voir aussi [6], théorème 5, page 8). Soit $f \in \mathscr{E}$ à support contenu dans $]0, a]$, $a > 0$. Pour $x = \operatorname{Re} z > 0$, $y = \operatorname{Im} z$, on a $F(z) = \mathfrak{M} f(z) = \int_0^\infty f(t)\, t^{z-1}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g_x(s)\, e^{iys}\, ds$, avec $g_x(s) = f(e^s)\, e^{sx} = g_0(s)\, e^{sx}$, $g_0 \in L^2(\mathbf{R})$, g_0 nulle au voisinage de $+\infty$, $\| g_x \|_{L^2(\mathbf{R})} = \| t^x f \|_{\mathscr{E}}$, $x \geqslant 0$. Autrement dit, la fonction F_x est la transformée de Fourier de $g_x \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$ pour $x > 0$, et la formule de Plancherel donne (3.4) pour $x > 0$. Comme $g_x \to g_0$ dans $L^2(\mathbf{R})$ lorsque $x \to +0$, F_x tend vers une limite F_0 dans $L^2(\mathbf{R})$, F_0 étant la transformée de Fourier de g_0; de plus, la formule (3.4) reste valable pour $x = 0$. Enfin 1) et 2) sont vérifiés, l'inégalité de 2) avec $C = \sqrt{2\pi} \| f \|_{\mathscr{E}}$ résultant de (3.4).

Soit F une fonction vérifiant 1) et 2). En vertu du lemme 1.6, pour tout $r > 0$, on a $| F(z) | \leqslant C(r)\, a^{\operatorname{Re} z}$, pour $\operatorname{Re} z > r$, donc $F \in \mathscr{H}_+$. Soit $f = \mathfrak{N} F \in \mathscr{E}'_+$. Si $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}_+)$, comme $\mathfrak{N} F$ est limite dans $\mathscr{D}'(\mathbf{R}_+)$ des fonctions (2.7), on a

$$2\pi \langle f, \varphi \rangle = \lim_{A \to \infty} \int_0^\infty dt \int_{-A}^{+A} \varphi(t)\, t^{-x-iy} F_x(y)\, dy .$$

Le théorème de Fubini donne, avec $\Phi = \mathfrak{M} \varphi$,

$$2\pi \langle f, \varphi \rangle = \int \Phi_{1-x}(-y)\, F_x(y)\, dy ,$$

d'où, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$2\pi | \langle f, \varphi \rangle | \leqslant \| \Phi_{1-x} \|_{L^2(\mathbf{R})} \| F_x \|_{L^2(\mathbf{R})} .$$

Finalement, compte tenu de (3.4) valable quel que soit $x \in \mathbf{R}$ pour f remplacé par $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}_+)$,

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leqslant M \| t^{1-x} \varphi \|_{\mathscr{E}} a^x$$

avec $M > 0$. En posant $\psi = t^{1/2-x} \varphi$ il vient

$$|\langle t^{x-1/2} f, \psi \rangle| \leqslant M a^x \| \psi \|_{L^2(\mathbf{R}_+)}, \quad x > 0,$$

pour tout $\psi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}_+)$. Le théorème de représentation de Riesz entraîne alors que $t^{x-1/2} f \in L^2(\mathbf{R}_+)$ et que

$$\int_0^{\infty} (t/a)^{2x} |f(t)|^2 t^{-1} dt \leqslant M^2$$

pour tout $x > 0$. Lorsque $x \to \infty$, cette inégalité implique que le support de f est contenu dans $]0, a]$; si $x \to +0$, elle donne que $f \in \mathscr{E}$, c.q.f.d.

Comme application du théorème précédent, nous allons introduire des espaces qui permettront de classer les éléments de $\mathscr{E}'_+$ en fonction de leur régularité et de leur ordre de grandeur au voisinage de l'origine.

Espaces $\mathscr{H}_r^s$ et $\mathscr{E}_r^s$. Etant donné deux nombres réels r et s, nous désignerons par $\mathscr{H}_r^s$ l'ensemble des fonctions $F \in \mathscr{H}_+$ telles que $(z+r+1)^s F(z) = G(z+r)$, avec $G \in \mathscr{H} = \mathfrak{M}\mathscr{E}$; en particulier $\mathscr{H}_0^0 = \mathscr{H}$. Ainsi, si $F \in \mathscr{H}_r^s$, $F(z)$ est holomorphe pour $\operatorname{Re} z > -r$ et l'application

$$y \mapsto (x+iy+r+1)^s F(x+iy)$$

est dans $L^2(\mathbf{R})$ pour $x > -r$.

On a $\mathscr{H}_r^s \subset \mathscr{H}_{r'}^{s'}$ si et seulement si $r' \leqslant r$ et $s' \leqslant s$.

Nous poserons $\mathscr{E}_r^s = \mathfrak{N}\mathscr{H}_r^s$ la transformée de Mellin inverse de $\mathscr{H}_r^s$; en particulier $\mathscr{E}_0^0 = \mathscr{E}$.

Dans le cas où s est un entier, on peut caractériser $\mathscr{E}_r^s$ directement:

Proposition 3.3. *Soit m un entier $\geqslant 0$ et soit $T \in \mathscr{E}'_+$.*

a) *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a.1) $T \in \mathscr{E}_r^m$.

(a.2) $t^{-r} D^j T \in \mathscr{E}$ *pour* $0 \leqslant j \leqslant m$.

(a.3) $t^{j-r} T^{(j)} \in \mathscr{E}$ *pour* $0 \leqslant j \leqslant m$.

b) *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(b.1) $T \in \mathscr{E}_r^{-m}$.

(b.2) $T = t^r \sum_{j=0}^{m} D^j f_j$ *avec* $f_j \in \mathscr{E}$.

(b.3) $T = \sum_{j=0}^{m} t^{r+j} h_j^{(j)}$ *avec* $h_j \in \mathscr{E}$.

Démonstration. Compte tenu de la formule de Leibniz et de l'égalité $\mathscr{E}_r^s = t^r \mathscr{E}_0^s$, on peut supposer que $r = 0$. Les équivalences de (a.2) et (a.3) ainsi que de (b.2) et (b.3) découlent du lemme 1.1.

Soit $F = \mathfrak{M}T$. On a $T \in \mathscr{E}_0^m \Leftrightarrow (z+1)^m F(z) = G(z)$ avec $G \in \mathscr{H}$ $\Leftrightarrow z^j F \in \mathscr{H}$ pour $0 \leqslant j \leqslant m \Leftrightarrow D^j T \in \mathscr{E}$ pour $0 \leqslant j \leqslant m$.

Si $T \in \mathscr{E}_0^{-m}$ on a $F(z) = (z+1)^m G(z)$ avec $G \in \mathscr{H}$. La formule du binôme donne (b.2) avec $f_j = (-1)^j \binom{m}{j} \mathfrak{M}G$.

Si T vérifie (b.2) avec $r = 0$, on a $F(z) = \sum_{j=0}^{m} (-z)^j \mathfrak{M}f_j(z)$ $= (1+z)^m G(z)$ avec $G(z) = \sum_{j=0}^{m} (-z)^j (1+z)^{-m} \mathfrak{M}f_j(z)$ donc $G \in \mathscr{H}$ et $T \in \mathscr{H}_0^{-m}$, c.q.f.d.

L'appartenance à la réunion $\mathscr{E}_{-\infty}^s$ des espaces $\mathscr{E}_r^s$, $r \in \mathbf{R}$, caractérise la régularité d'une distribution. On vérifie en effet que localement, les éléments de $\mathscr{E}_{-\infty}^s$ sont dans l'espace de Sobolev $H^s(\mathbf{R})$ formé des distributions S sur $\mathbf{R}$ telles que $(1+|x|^2)^{s/2} \hat{S}(x)$ soit de carré intégrable, $\hat{S}$ étant la transformée de Fourier de S. Nous démontrerons le résultat suivant:

PROPOSITION 3.4. *Soit* $s > m + 1/2$ *avec* $m \in \mathbf{N}$, *et* $r \in \mathbf{R}$. *Si* $f \in \mathscr{E}_r^s$, *on a* $f \in C^m(\mathbf{R}_+)$ *et*

$$f^{(j)}(t) = o(t^{r-j}) \quad \textit{lorsque} \quad t \to +0$$

pour $0 \leqslant j \leqslant m$.

Démonstration. On a $(z+r+1)^s \mathfrak{M}f(z) = G(z+r)$ avec $G \in \mathscr{H}$. Par suite, pour $x > -r$,

$$f^{(j)}(t) = \frac{(-1)^j}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} t^{-z-j} z(z+1)\dots(z+j-1)\, G(z+r)(z+r+1)^{-s}\, dz$$

fonction continue sur $\mathbf{R}_+$ pour $0 \leqslant j \leqslant m$, donc $f \in C^m(\mathbf{R}_+)$. Comme $G_x : y \mapsto G(x+iy)$ converge vers G_0 dans $L^2(\mathbf{R})$ lorsque $x \to +0$, on a aussi

$$f^{(j)}(t) = \frac{t^{r-j}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy\log t} \frac{(r-iy)(r-iy-1)\dots(r-iy-j+1)\,G_0(y)}{(1+iy)^s}\,dy$$

où l'intégrale tend vers 0 lorsque $t \to +0$, d'après le lemme de Riemann-Lebesgue. Par conséquent, $f^{(j)}(t) = o(t^{r-j})$ lorsque $t \to +0$, c.q.f.d.

Remarque 1. Si $s < m + 1/2$, $\mathscr{E}_r^s$ n'est pas contenu dans $C^m(\mathbf{R}_+)$. Soit en effet $f \in \mathscr{E}'_+$ tel que $(-D)^m f$ soit la fonction égale à 1 sur $]0, 1[$ et nulle sur $[1, \infty[$. Il est clair que $t^{r+1} f$ n'appartient pas à $C^m(\mathbf{R}_+)$ bien que $\mathfrak{M}(t^{r+1} f)(z) = (z+r+1)^{-m-1}$ appartienne à $\mathscr{H}_r^s$ pour $s < m + 1/2$.

Remarque 2. Si $f \in C^m(\mathbf{R}_+)$, $m \geqslant 0$, et si $f^{(j)}(t) = O(t^{r-j})$ lorsque $t \to +0$ pour $0 \leqslant j \leqslant m$, il est clair que $f \in \mathscr{E}_{r'}^m$ pour tout $r' < r$, puisque $f^{(j)} = t^{r'-j} h_j$ avec $h_j \in \mathscr{E}$ (proposition 3.3). En général, on ne peut pas remplacer r' par r: une fonction $f \in C^\infty(\mathbf{R}_+)$ qui est égale à $|\log t|^{-1/2}$ au voisinage de 0 vérifie $f^{(j)}(t) = o(t^{-j})$ lorsque $t \to +0$ pour $0 \leqslant j \leqslant m$. Cependant, quel que soit $s \in \mathbf{R}$, f n'appartient pas à $\mathscr{E}_0^s$; en effet, $\mathfrak{M}f(z) - C z^{-1/2}$ (C constante $\neq 0$) est entière.

La proposition suivante donne des conditions pour qu'une fonction de classe C^{m-1} soit dans $\mathscr{E}_r^m$.

PROPOSITION 3.5. *Soit m un entier $\geqslant 1$, $r \in \mathbf{R}$ et $f \in C^{m-1}(\mathbf{R}_+)$ à support borné telle que $t^{m-r} f^{(m)} = g \in \mathscr{E}$.*

a) *Si $r < 0$, on a $f \in \mathscr{E}_r^m$.*

b) *Si $r > m - 1$, on a $f \in \mathscr{E}_r^m$ si et seulement si $f^{(j)}(t) \to 0$ lorsque $t \to +0$ pour $0 \leqslant j \leqslant m - 1$.*

c) *Si $0 \leqslant r \leqslant m - 1$, on a $f \in \mathscr{E}_r^m$ si et seulement si $f^{(j)}(t) \to 0$ lorsque $t \to +0$ pour $0 \leqslant j < r$ et $f^{(r)} \in \mathscr{E}$ si r entier.*

Démonstration. Soit $F = \mathfrak{M}f$ et $G = \mathfrak{M}g \in \mathscr{H}$. Par hypothèse $\mathfrak{M}(f^{(m)})(z) = (-1)^m (z-1)(z-2)\dots(z-m)\,F(z-m) = G(z+r-m)$. On a $f \in \mathscr{E}_r^m$ si et seulement si

$$G_0(z) = (z+1)^m F(z-r) = \frac{(-1)^m (z+1)^m G(z)}{(z-r)(z-r+1)\dots(z-r+m-1)}$$

est une fonction de $\mathscr{H}$.

a) Si $r < 0$, il est clair que $G_0 \in \mathscr{H}$ donc $f \in \mathscr{E}_r^m$.

b) Si $r > m-1$, $G_0 \in \mathscr{H}$ si et seulement si $G(r-j) = 0$ pour $0 \leqslant j \leqslant m-1$. Puisque $f^{(m)} = t^{r-m} g$, on a pour $0 \leqslant j \leqslant m-1$

$$f^{(j)}(t) = \int_{\infty}^{t} \frac{(t-u)^{m-j-1}}{(m-j-1)!} u^{r-m} g(u)\, du$$

$$= \sum_{k=0}^{m-j-1} \frac{(-1)^{m-k-j-1}}{k!\,(m-k-j-1)!} t^k \int_{\infty}^{t} u^{r-k-j-1} g(u)\, du .$$

Mais, si $\alpha > 0$, $\int_{\infty}^{t} u^{\alpha-1} g(u)\, du = -G(\alpha) + o(t^{\alpha})$. En effet, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, lorsque $t \to +0$,

$$\left| \int_0^t u^{\alpha-1} g(u)\, du \right|^2 \leqslant \int_0^t u^{2\alpha-1}\, du \int_0^t |g(u)|^2 u^{-1}\, du = o(t^{2\alpha}) .$$

Par suite

$$f^{(j)}(t) = \frac{(-1)^{m-j}}{(m-j-1)!} G(r-j) + o(1) , \tag{3.5}$$

et $G(r-j) = 0$ si et seulement si $f^{(j)}(t) = o(1)$.

c) Si $0 \leqslant r \leqslant m-1$, $G_0 \in \mathscr{H}$ si et seulement si $G(r-j) = 0$ pour $0 \leqslant j < r$ et $z^{-1} G \in \mathscr{H}$ dans le cas où r est entier. Comme précédemment l'égalité (3.5) est valable pour $0 \leqslant j < r$. On a donc $G(r-j) = 0$ si et seulement si $f^{(j)}(t) = o(1)$, avec $0 \leqslant j < r$.

Dans le cas où r est entier, $f \in \mathscr{E}_r^m$ entraîne $f^{(r)} \in \mathscr{E}$. Inversement, si $f^{(r)} = h \in \mathscr{E}$ et si $f^{(j)}(t) = o(1)$ pour $0 \leqslant j < r$ avec $r \geqslant 1$,

$$f(t) = \int_0^t \frac{(t-u)^{r-1}}{(r-1)!} h(u)\, du = t^r h_0(t)$$

où

$$h_0(t) = \frac{1}{(r-1)!} \int_0^1 (1-s)^{r-1} h(st)\, ds$$

appartient à $\mathscr{E}$. Il s'ensuit que $F(z-r) = \mathfrak{M} h_0(z)$ est dans $\mathscr{H}$ donc aussi G_0, c.q.f.d.

PROPOSITION 3.6. 1) *L'intersection des espaces* $\mathscr{E}_r^s$, $r, s \in \mathbf{R}$, *est égale à l'ensemble* C_0^{∞} *des fonctions* C^{∞} *sur* $[0, \infty[$, *à support borné, plates en* 0.

2) *$\mathscr{E}'_+$ est égal à la réunion des espaces $\mathscr{E}^s_r$, r, $s \in \mathbf{R}$.*

Démonstration. 1) Si $f \in \mathscr{E}^{m+1}_m$ avec $m \in \mathbf{N}$, la proposition 3.4 montre que f est de classe C^m sur $[0, \infty[$ et que $f^{(j)}(0) = 0$ pour $0 \leqslant j \leqslant m$; il suffit de prendre m arbitrairement grand pour obtenir $f \in C^\infty_0$.

Si $f \in C^\infty_0$, la proposition 3.5 montre que $f \in \mathscr{E}^m_r$ quels que soient $m \in \mathbf{N}$ et $r \in \mathbf{R}$.

2) Si $T \in \mathscr{E}'_+$, la proposition 1.5 entraîne que $T = D^m(t^{-q}g)$ avec m, $q \in \mathbf{N}$ et $g \in C^0_+$. Or $f = tg \in \mathscr{E}$ et $T = D^m(t^{-(q+1)}f)$ appartient à $\mathscr{E}^{-m}_{-(q+1)}$ en raison de la proposition 3.3 et de la formule de Leibniz.

4. Comportement asymptotique au voisinage de l'origine

Soit $\mathscr{E}^{-\infty}_r$ la réunion des espaces $\mathscr{E}^s_r$, $s \in \mathbf{R}$. On peut considérer que l'appartenance à $\mathscr{E}^{-\infty}_r$ caractérise *l'ordre de grandeur* d'une distribution au voisinage de l'origine. En effet, le théorème 3.1 montre que cette appartenance est une propriété du germe à l'origine; d'autre part, l'égalité $\mathscr{E}^{-\infty}_r = t^r \mathscr{E}^{-\infty}_0$ qui résulte de (2.9) et les propositions 3.4 et 3.5 montrent que la propriété $T \in \mathscr{E}^{-\infty}_r$ est voisine des propriétés $T = o(t^r)$ ou $T = O(t^r)$ lorsque $t \to +0$.

Exemples. Soit $\chi \in C^\infty(\mathbf{R}_+)$ une fonction à support borné égale à 1 au voisinage de 0. Posons $X = \mathfrak{M}\chi$. On a $X(z) = z^{-1}\Phi(z)$, où $\Phi = -\mathfrak{M}(D\chi)$ est la transformée de Mellin d'une fonction de $\mathscr{D}(\mathbf{R}_+)$ (voir le théorème 3.1 pour les propriétés de Φ) et $\Phi(0) = 1$. Pour $p \in \mathbf{C}$ et $k \in \mathbf{N}$ posons

$$\chi_{p,k}(t) = t^p(\log t)^k \chi(t)\,. \tag{4.1}$$

On a $X_{p,k}(z) = \mathfrak{M}\chi_{p,k}(z) = X^{(k)}(z+p)$, fonction méromorphe de z avec un pôle d'ordre $k+1$ en $-p$, de partie principale $(-1)^k\, k!\,(z+p)^{-(k+1)}$. De plus, si le support de χ est contenu dans $]0, a]$, quel que soit $m \in \mathbf{N}$,

$$(1+|z|)^m (z+p)^{k+1} X_{p,k}(z)\, a^{-\operatorname{Re} z} \text{ est borné pour } \operatorname{Re} z \geqslant -m\,. \tag{4.2}$$

Etant donné s réel, on a $\chi_{p,k} \in \mathscr{E}^s_r$ si et seulement si $\operatorname{Re} p > r$.

DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES. Donnons-nous une suite (p_j) de nombres complexes distincts telle que $\operatorname{Re} p_j \to +\infty$ lorsque $j \to \infty$ et une suite (m_j) de $\mathbf{N}$.

Pour tout $r \in \mathbf{R}$, soit $J(r) = \{(j, k) \in \mathbf{N}^2 ; \operatorname{Re} p_j \leqslant r, 0 \leqslant k \leqslant m_j\}$ et soit J la réunion des $J(r)$.

Considérons la famille $\mathscr{F}$ des fonctions $\chi_{p_j,k}$, $(j, k) \in J$, avec (4.1).

DÉFINITIONS. 1) On dit que $f \in \mathscr{E}'_+$ admet un *développement asymptotique généralisé à l'ordre r* ($r \in \mathbf{R}$), par rapport à $\mathscr{F}$, s'il existe des nombres $a_{j,k} \in \mathbf{C}$, $(j, k) \in J(r)$ tels que la différence

$$f_r = f - \sum_{(j,k) \in J(r)} a_{j,k}\, \chi_{p_j,k} \tag{4.3}$$

appartienne à $\mathscr{E}_r^{-\infty}$.

Les nombres $a_{j,k}$ sont alors déterminés de manière unique; en effet, pour qu'une combinaison linéaire des $X_{p_j,k}$, $(j, k) \in J(r)$, appartienne à un espace $\mathscr{H}_r^s$, il faut que ses coefficients soient tous nuls.

2) On dit que $f \in \mathscr{E}'_+$ admet un *développement asymptotique généralisé illimité*, par rapport à $\mathscr{F}$, si f admet un développement asymptotique généralisé à l'ordre r pour tout $r \in \mathbf{R}$.

3) Soit $s \in \mathbf{R}$. On dit que $f \in \mathscr{E}'_+$ admet un *développement asymptotique de type* $\mathscr{E}^s$, *à l'ordre* r ($r \in \mathbf{R}$), par rapport à $\mathscr{F}$, s'il existe des $a_{j,k}$, $(j, k) \in J(r)$, tels que $f_r \in \mathscr{E}_r^s$ avec (4.3).

4) On dit que $f \in \mathscr{E}'_+$ admet un *développement asymptotique de type* $\mathscr{E}^s$ *illimité*, par rapport à $\mathscr{F}$, si f satisfait à la définition 3 pour tout $r \in \mathbf{R}$.

5) On dit que $f \in \mathscr{E}'_+$ admet un *développement asymptotique illimité, indéfiniment dérivable*, par rapport à $\mathscr{F}$, si f satisfait à la définition 4 pour tout $s \in \mathbf{N}$.

Les propositions suivantes montrent que, sous des hypothèses convenables, les développements asymptotiques généralisés sont en fait des développements asymptotiques usuels, et réciproquement. La proposition 4.1 est une conséquence immédiate de la proposition 3.4 et de la remarque 2 qui suit cette proposition:

PROPOSITION 4.1. *Soit* $m \in \mathbf{N}$ *et* $f \in \mathscr{E}'_+$.

1) *Si* f *admet un développement asymptotique généralisé de type* $\mathscr{E}^{m+1}$, *à l'ordre* r, *par rapport à* $\mathscr{F}$, *alors* $f \in C^m(\mathbf{R}_+)$ *et il existe des nombres complexes* $a_{j,k}$ *tels que*

$$f(t) = \sum_{(j,k) \in J(r)} a_{j,k} t^{p_j} (\log t)^k + f_r(t), \tag{4.4}$$

avec $f_r^{(j)}(t) = o(t^{r-j})$ *lorsque* $t \to +0$, *pour* $0 \leqslant j \leqslant m$.

2) *Si* f *vérifie* (4.4) *avec* $f_r \in C^m(\mathbf{R}_+)$ *et* $f_r^{(j)}(t) = O(t^{r-j})$ *lorsque* $t \to +0$, *pour* $0 \leqslant j \leqslant m$, *alors* f *admet un développement asymptotique généralisé de type* $\mathscr{E}^m$, *à l'ordre* r' *pour tout* $r' < r$.

La proposition suivante découle facilement de la proposition 4.1.

PROPOSITION 4.2. *Pour que* $f \in \mathscr{E}'_+$ *admette un développement asymptotique illimité indéfiniment dérivable, par rapport à* $\mathscr{F}$, *il faut et il suffit que* $f \in C^\infty(\mathbf{R}_+)$ *et que*

$$f(t) \sim \sum_{(j,k) \in J} a_{j,k} t^{p_j} (\log t)^k \tag{4.5}$$

lorsque $t \to +0$, *développement asymptotique au sens usuel, indéfiniment dérivable terme à terme.*

L'existence d'un développement asymptotique pour une distribution f de $\mathscr{E}'_+$ est équivalente à des propriétés de méromorphie et de croissance pour la transformée de Mellin de f. Un exemple est fourni par la proposition 4.3; (voir aussi [5], proposition 1.1, page 397, où il est montré que, pour des topologies naturelles, la transformation de Mellin est un isomorphisme vectoriel topologique de l'espace des fonctions admettant un développement asymptotique sur l'espace de leurs transformées de Mellin).

PROPOSITION 4.3. *Soit* $f \in \mathscr{E}'_+$, $F = \mathfrak{M}f$. *Pour que* f *admette un développement asymptotique illimité indéfiniment dérivable, par rapport à* $\mathscr{F}$, *il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :*

a) F *est méromorphe dans* $\mathbf{C}$ *avec pôle d'ordre* $\leqslant m_j + 1$ *au point* $-p_j$ *pour tout* $j \in \mathbf{N}$.

b) *Il existe* $a > 0$ *tel que, pour tout* $m \in \mathbf{N}$, $(1+|z|)^m F(z)\, a^{-\operatorname{Re} z}$ *soit borné en dehors d'un compact du demi-plan* $\operatorname{Re} z \geqslant -m$.

Démonstration. Les conditions a) et b) sont nécessaires: Soit $a > 0$ tel que les supports de f et χ soient dans $]0, a]$, où χ est la fonction qui intervient dans (4.1). Quel que soit $m \in \mathbf{N}$, en prenant $r = m + 1$, et en définissant f_r par (4.3), on peut supposer que $f_r \in \mathscr{E}^m_r$, donc que $F_r(z) = \mathfrak{M}f_r(z) = (z+r+1)^{-m} G_r(z+r)$ est holomorphe pour $\operatorname{Re} z > -r$, avec $G_r \in \mathscr{H}$. La caractérisation de $\mathscr{H} = \mathfrak{M}\mathscr{E}$ au théorème 3.2 et le lemme 1.6 montrent que $(1+|z|)^m F_r(z)\, a^{-\operatorname{Re} z}$ est borné pour $\operatorname{Re} z \geqslant -m$. Comme $F(z) = \sum_{(j,k) \in J(r)} a_{j,k} X_{p_j,k}(z) + F_r(z)$, F est méromorphe dans $\operatorname{Re} z > -r$ et ses pôles sont ceux des $a_{j,k} X_{p_j,k}$, d'où a) et b) compte tenu de (4.2).

Les conditions a) et b) sont suffisantes: Soit

$$\sum_{k=0}^{m_j} a_{j,k}(-1)^k k!\,(z+p_j)^{-(k+1)}$$

la partie principale de F au pôle $-p_j$. Etant donné $r \in \mathbf{R}$, posons

$$F_r(z) = F(z) - \sum_{(j,k) \in J(r)} a_{j,k} X_{p_j,k}(z)\,.$$

Si $n \in \mathbf{N}$, d'après b) pour $m > \max(n, r)$, on a que $F_r \in \mathscr{H}^n_r$. Par transformation de Mellin inverse, il s'ensuit que f_r donnée par (4.3) appartient à $\mathscr{E}^n_r$, c.q.f.d.

Application. Nous allons appliquer les résultats précédents à la fonction

$$F(z) = \langle A_+^{z-1}, \Phi \rangle = \int_V (A(x))_+^{z-1}\, \Phi(x)\,, \tag{4.6}$$

où A est une fonction analytique réelle, non constante, sur une variété analytique réelle V connexe, paracompacte, de dimension n, et Φ appartient à l'espace $\mathscr{D}(V)$ des n-formes différentielles impaires, de classe C^∞, à support compact dans V. Il est clair que F est holomorphe pour $\operatorname{Re} z > 1$, puisque l'application $(x, z) \mapsto (A(x))_+^{z-1}$ est continue, et holomorphe par rapport à z, pour $x \in V$ et $\operatorname{Re} z > 1$. Dans [1], en utilisant une version du théorème de résolution des singularités de Hironaka, Atiyah montre que F admet un prolongement analytique méromorphe dans $\mathbf{C}$. En reprenant sa méthode, nous allons préciser le résultat.

Soit U un ouvert relativement compact de V, dans lequel A n'ait pas d'autre valeur critique que la valeur 0. L'application linéaire continue $A^* : C^\infty(\mathbf{R}) \to C^\infty(U)$ telle que $A^*\psi(x) = \psi(A(x))$, donne par transposition une application linéaire continue A_* de $\mathscr{D}(U)$ dans $\mathscr{M}_c(\mathbf{R})$ l'espace des mesures à support compact sur $\mathbf{R}$, définie par $\langle A_*\Phi, \psi \rangle = \langle \Phi, A^*\psi \rangle = \int_U \psi(A(x))\, \Phi(x)$, pour $\Phi \in \mathscr{D}(U)$ et $\psi \in C^\infty(\mathbf{R})$. Comme $dA \neq 0$ dans $U^* = \{x \in U\,;\, A(x) \neq 0\}$, il existe dans U^* une $(n-1)$-forme impaire Ω de classe C^∞ telle que $\Phi = dA \wedge \Omega$ et l'on a, pour $\psi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^*)$, $\langle A_*\Phi, \psi \rangle = \int f(t)\,\psi(t)\,dt$ avec $f(t) = \int_{A^{-1}(t)} \Omega(x)$, l'injection de $A^{-1}(t) \cap U^*$ dans U^* étant convenablement orientée. Ainsi, dans $\mathbf{R}^*$

$= \mathbf{R} \setminus \{ 0 \}$, $A_* \Phi$ coïncide avec la fonction f de classe C^∞ et A_* induit une application linéaire continue de $\mathcal{D}(U^*)$ dans $\mathcal{D}(\mathbf{R}^*)$. Par dualité on obtient donc une application linéaire continue de $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^*)$ dans $\mathcal{D}'(U^*)$ l'espace des distributions dans U^*, définie par $\langle A^*S, \Phi \rangle = \langle S, A_*\Phi \rangle$ pour $S \in \mathcal{D}'(R^*)$ et $\Phi \in \mathcal{D}(U^*)$; A^*S est l'image réciproque de S par A. Soit $\delta_t(A) = A^*\delta_t$ l'image réciproque par A de la mesure de Dirac δ_t au point $t \neq 0$. On a

$$f(t) = \langle \delta_t(A), \Phi \rangle = A_* \Phi(t) . \tag{4.7}$$

PROPOSITION 4.4. *Soit U un ouvert relativement compact de V, dans lequel A n'ait pas d'autre valeur critique que* 0. *Il existe un entier $q = q(U) \geqslant 1$ tel que, pour toute $\Phi \in \mathcal{D}(U)$, la fonction F définie par* (4.6) *vérifie les conditions* a) *et* b) *de la proposition* 4.3, *avec $p_j = -1 + (j+1)/q$ et $m_j \leqslant n-1$ ($j \in \mathbf{N}$, $n = \dim V$). F est la transformée de Mellin de la fonction f donnée par* (4.7); *f est intégrable et de classe C^∞ sur R_+; lorsque $t \to +0$, f admet un développement asymptotique*

$$f(t) \sim \sum a_{j,k}\, t^{-1+(j+1)/q} (\log t)^k \tag{4.8}$$

($j, k \in \mathbf{N}$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$), *indéfiniment dérivable terme à terme.*

Démonstration. (Voir aussi [4]). En suivant la démarche de [1], par désingularisation et localisation, on se ramène au cas où $V = \mathbf{R}^n$ et

$$F(z) = \int_Q (x_1^{q_1} \ldots x_n^{q_n})^{z-1} \varphi(x)\, dx ,$$

avec $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, $Q = \{ x \in \mathbf{R}^n \,;\, x_k \geqslant 0, 1 \leqslant k \leqslant n \}$, et où les q_k sont des entiers $\geqslant 0$ non tous nuls.

Nous dirons qu'une fonction $F_k(x_1, \ldots, x_k; z)$ a la propriété P_k ($0 \leqslant k \leqslant n$, P_0 est à interpréter de manière évidente) si

1) $F_k \in C^\infty(\mathbf{R}^k \times (\mathbf{C} \setminus S_k))$, S_k étant une partie fermée discrète, bornée supérieurement, de $\mathbf{R}$.

2) Pour tout $z \in \mathbf{C} \setminus S_k$, $x' \mapsto F_k(x'; z)$ est une fonction appartenant à $C^\infty(\mathbf{R}^k)$, à support dans un compact fixe de $\mathbf{R}^k$.

3) Pour tout $x' \in \mathbf{R}^k$, $z \mapsto F_k(x'; z)$ est méromorphe dans $\mathbf{C}$ avec pôles d'ordre $\leqslant n-k$ aux points de S_k.

4) Si $k \leqslant n-1$, il existe $a_k > 0$ tel que, quels que soient $\alpha \in \mathbf{N}^k$, $m \in \mathbf{N}$, on ait $| \partial^\alpha_{x'} F_k(x'; z) | \leqslant C_{\alpha m} (1 + |z|)^{-m} a_k^{\mathrm{Re}\, z}$ pour $x' \in \mathbf{R}^k$, $\mathrm{Re}\, z \geqslant -m$, distance $(z, S_k) \geqslant 1$, avec $C_{\alpha m} > 0$.

$F_n = \varphi$ a la propriété P_n, et les propriétés a) et b) de la proposition 4.3 pour F, équivalent à la propriété P_0 pour $F_0 = F$, avec

$$S_0 = \{ 1 - (j+1)/q \, ; j \in \mathbf{N} \},$$

q entier > 0. Il suffit donc de prouver que si F_{k+1} a la propriété P_{k+1} alors

$$F_k(x'; z) = \int_0^\infty t^{q_{k+1}(z-1)} F_{k+1}(x', t; z)\, dt$$

a la propriété P_k. Or, avec les notations du début du paragraphe, la formule de Taylor donne

$$F_{k+1}(x', t; z) = \sum_{j=0}^{\mu} \frac{1}{j!} \partial_{k+1}^j F_{k+1}(x', 0; z)\, t^j \chi(t) + t^{\mu+1} R_\mu(x', t; z)$$

avec

$$R_\mu(x', t; z) = t^{-(\mu+1)}(1 - \chi(t)) F_{k+1}(x', t; z)$$
$$+ \chi(t) \int_0^1 \frac{(1-s)^\mu}{\mu!} \partial_{k+1}^{\mu+1} F_{k+1}(x', ts; z)\, ds\,.$$

On a donc, avec $X = \mathfrak{M}\chi$,

$$F_k(x'; z) = \sum_{j=0}^{\mu} \frac{1}{j!} \partial_{k+1}^j F_{k+1}(x', 0; z)\, X(zq_{k+1} - q_{k+1} + j + 1)$$
$$+ \int_0^\infty t^{q_{k+1}(z-1)+\mu+1} R_\mu(x', t; z)\, dt\,.$$

En prenant μ arbitrairement grand, on montre facilement que F_k a la propriété P_k avec $S_k = S_{k+1} \cup \{ 1 - (j+1)/q_{k+1} ; j \in \mathbf{N} \}$.

Puisque F a les propriétés a) et b) de la proposition 4.3, on a $F = \mathfrak{M}g$ où $g \in \mathscr{E}'_+$ est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}_+$ et admet, lorsque $t \to +0$, un développement asymptotique du type (4.8) indéfiniment dérivable terme à terme; en particulier, $g(t) = o(t^{-1+1/2q})$ lorsque $t \to +0$ et g est intégrable sur $\mathbf{R}_+$. Par ailleurs, on a vu que $A_*\Phi$ était une mesure à support compact sur $\mathbf{R}$ prolongeant la fonction f considérée sur $\mathbf{R}_+$; par suite, $f \in \mathscr{E}'_+$ et pour $\operatorname{Re} z > 1$,

$$\mathfrak{M}f(z) = \langle A_*\Phi, t_+^{z-1} \rangle = \int_V (A(x))_+^{z-1} \Phi(x) = F(z) = \mathfrak{M}g(z)\,.$$

On en déduit $f = g$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Atiyah, M. F. Resolution of singularities and division of distributions. *Comm. Pure Appl. Math. 23* (1970), pp. 145-150.

[2] Doetsch, G. *Handbuch der Laplace-Transformation.* Birkhäuser, Basel, 1950.

[3] Hörmander, L. *Linear partial differential operators.* Springer, Berlin, 1963.

[4] Jeanquartier, P. Développement asymptotique de la distribution de Dirac attachée à une fonction analytique. *C. R. Acad. Sci. Paris 271* (1970), pp. 1159-1161.

[5] Maire, H.-M. Sur les distributions images réciproques par une fonction analytique. *Comment. Math. Helv. 51* (1976), pp. 395-410.

[6] Paley, R. and N. Wiener. *Fourier transforms in the complex domain.* American Mathematical Society, Providence, 1934.

[7] Schwartz, L. *Théorie des distributions.* Hermann, Paris, 1966.

[8] —— *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques.* Hermann, Paris, 1961.

[9] Zemanian, A. H. *Generalized integral transformations.* Pure and applied mathematics, vol. 18, Interscience publishers, New York, 1968.

(Reçu le 10 mars 1979)

Pierre Jeanquartier

Section de Mathématiques
Université de Genève
Case postale 124
1211 Genève 24