

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 25 (1979)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR UNE FORMULE DE R. H. FOX CONCERNANT L'HOMOLOGIE  
DES REVÊTEMENTS CYCLIQUES  
**Autor:** Weber, Claude  
**Kapitel:** 4. La formule de R. H. Fox  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-50382>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 31.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Considérons  $K$  et  $S^3$  comme orientés. Alors, via des conventions fixées une fois pour toutes, on obtient un générateur  $t$  du groupe de Galois du revêtement  $X_\infty \rightarrow X$ .

Les « groupes » d'homologie  $H_1(X_\infty, R)$ ,  $H_1(\hat{X}_m, R)$  et  $H_1(X_m, R)$  sont alors munis d'une structure de  $RT$ -modules,  $t$  agissant via Galois.

Les faits suivants sont bien connus. Pour une démonstration, voir [4].

(i)  $H_1(X_\infty, \mathbf{Z})$  est un  $\mathbf{Z}T$ -module de type fini. (C'est essentiellement une conséquence du fait que  $\mathbf{Z}T$  est noëthérien.)

(ii)  $H_1(\hat{X}_m; R) \approx \text{Coker } \{1 - t^m : H_1(X_\infty, R) \rightarrow H_1(X_\infty, R)\}$ .  
(C'est une conséquence de la « suite exacte de Milnor »).

Si l'on fait  $m = 1$  dans la dernière égalité et si l'on utilise le fait que  $RT$  est noëthérien, on obtient que  $1 - t : H_1(X_\infty, R) \rightarrow H_1(X_\infty; R)$  est un isomorphisme pour tout  $R$  noëthérien.

(iii)  $H_1(X_\infty, \mathbf{Q})$  est un espace vectoriel de dimension finie sur  $\mathbf{Q}$ .  
(Conséquence facile du dernier argument par  $R = \mathbf{Q}$ .)

Le résultat suivant est dû à R. H. Crowell [1].

(iv) Soit  $A$  un  $\mathbf{Z}T$ -module admettant une présentation carrée (c'est-à-dire : nombre de générateurs égal au nombre de relations). Soit  $\Delta \in \mathbf{Z}T$  le déterminant de cette présentation. ( $\Delta$  est le générateur du premier idéal élémentaire de  $A$ .) Alors  $A$  est sans  $\mathbf{Z}$ -torsion si et seulement si  $\Delta$  est « primitif » (c'est-à-dire si ses coefficients sont premiers entre eux). Il est classique que  $H_1(X_\infty; \mathbf{Z})$  satisfait les hypothèses du théorème de Crowell.

Le dernier fait dont nous aurons besoin est dû à M. Kervaire [5]:

(v) Soit  $A$  un  $\mathbf{Z}T$ -module de type fini et tel que la multiplication par  $(1 - t)$  soit un isomorphisme, alors le sous-groupe de  $\mathbf{Z}$ -torsion de  $A$  est fini.

#### 4. LA FORMULE DE R. H. FOX

Conformément à nos conventions du paragraphe précédent, désignons par  $\hat{X}_m$  le revêtement cyclique à  $m$  feuilles de  $S^3$ , ramifié sur nœud de polynôme d'Alexander  $\Delta$ . La formule de Fox s'énonce ainsi:

$H_1(\hat{X}_m; \mathbf{Z})$  est fini si et seulement si  $\text{Rés}(1 - t^m, \Delta) \neq 0$ . En ce cas l'ordre du groupe  $H_1(\hat{X}_m; \mathbf{Z})$  est égal à  $|\text{Rés}(1 - t^m, \Delta)|$ .

L'essentiel du paragraphe sera consacré à la démonstration de cette formule.

Pour abréger, désignons par  $A$  un  $\mathbf{Z}T$ -module de type fini, sans  $\mathbf{Z}$ -torsion, et de rang fini sur  $\mathbf{Q}$ . Nous commençons par appliquer à  $A$  un argument dû à D. W. Sumners [8]. Comme  $A$  est sans  $\mathbf{Z}$ -torsion, on a une injection naturelle:

$$A \hookrightarrow A \otimes \mathbf{Q}.$$

$A \otimes \mathbf{Q}$  est un  $\mathbf{Q}T$ -module. Comme  $\mathbf{Q}T$  est principal, on peut choisir un isomorphisme (de  $\mathbf{Q}T$ -modules):

$$A \otimes \mathbf{Q} \xrightarrow{\varphi} \bigoplus_i \mathbf{Q}T / (\lambda_i).$$

Comme  $A$  est de rang fini sur  $\mathbf{Q}$ , les polynômes  $\lambda_i$  sont différents de zéro. Sans restreindre la généralité, on peut les choisir à coefficients entiers, primitifs et satisfaisant la condition (\*) du § 2.

Par Crowell,  $\mathbf{Z}T / (\lambda_i)$  est sans  $\mathbf{Z}$ -torsion et l'on a donc une injection de  $\mathbf{Z}T$ -modules:

$$\bigoplus_i \mathbf{Z}T / (\lambda_i) \hookrightarrow \mathbf{Q}T / (\lambda_i) \rightarrow A \otimes \mathbf{Q}.$$

Dans  $A \otimes \mathbf{Q}$  se trouvent ainsi deux  $\mathbf{Z}T$ -modules de type fini, qui engendrent  $A \otimes \mathbf{Q}$  sur  $\mathbf{Q}$ . Il s'agit de  $A$  et de  $B = \bigoplus_i \mathbf{Z}T / (\lambda_i)$ .

*Affirmation 1:* Dans ces conditions, il existe un entier  $b \neq 0$  tel que  $b \cdot B \subset A$ . (Preuve évidente utilisant des systèmes finis de générateurs pour  $A$  et pour  $B$ .)

On obtient alors une suite exacte de  $\mathbf{Z}T$ -modules:

$$0 \rightarrow B \xrightarrow{\cdot b} A \rightarrow A / b \cdot B \rightarrow 0$$

*Affirmation 2:* Le quotient  $A / b \cdot B$  est un groupe abélien de torsion, d'exposant fini.

En effet, en inversant le rôle de  $A$  et  $B$  dans l'affirmation 1, il existe un entier  $a \neq 0$  tel que  $a \cdot A \subset B$ . Il est clair que  $a \cdot b$  annule  $A / b \cdot B$ .

*Avertissement :* Si  $\lambda$  et  $\mu$  sont deux éléments non nuls de  $\mathbf{Z}T$ , sans facteurs communs, on a

$$\mathbf{Q}T / (\lambda) \oplus \mathbf{Q}T / (\mu) \approx \mathbf{Q}T / (\lambda\mu).$$

Comme  $\mathbf{Z}T$  n'est pas principal, on n'a en général pas

$$\mathbf{Z}T / (\lambda) \oplus \mathbf{Z}T / (\mu) \approx \mathbf{Z}T / (\lambda\mu).$$

Ceci indique que le choix d'une décomposition de  $A \otimes \mathbf{Q}$  en somme de modules cycliques n'est pas innocent. Nous reviendrons sur ce point au § 5.

**PROPOSITION.** Soit  $A$  un  $\mathbf{Z}T$ -module de type fini, sans  $\mathbf{Z}$ -torsion et de rang fini sur  $\mathbf{Q}$ . Supposons qu'on a une injection  $B = \bigoplus_{i=1}^r \mathbf{Z}T / (\lambda_i) \hookrightarrow A$  telle que  $A / B$  soit un groupe fini. Alors  $A / (1-t^m)A$  est fini si et seulement si  $\text{Rés}(1-t^m, \prod_{i=1}^r \lambda_i) \neq 0$  et dans ce cas l'ordre de  $A / (1-t^m)A$  est égal à  $|\text{Rés}(1-t^m, \prod_{i=1}^r \lambda_i)|$ .

*Remarques.* 1)  $\prod \lambda_i$  ne dépend que de  $A$ , puisqu'il s'agit d'un générateur primitif du premier idéal élémentaire de  $A \otimes \mathbf{Q}$ , normalisé, suivant nos conventions, pour que ce soit un « vrai » polynôme de terme constant non nul. (Seul son signe est encore libre.)

2) Si  $A = H_1(X_\infty, \mathbf{Z})$ , nous savons déjà que  $A$  satisfait les hypothèses de la proposition. De plus, la multiplication par  $(1-t)$  est un isomorphisme de  $A$ . Comme  $\mathbf{Z}T$  est noëthérien, ceci reste vrai pour n'importe quel module quotient de  $A$ . Ainsi  $A / B$  satisfait les hypothèses du théorème de Kervaire.

Comme il est de  $\mathbf{Z}$ -torsion par l'affirmation 2, il est fini. Toutes les hypothèses de la proposition sont donc satisfaites, ce qui démontre la formule de Fox, puisque  $\prod \lambda_i = \Delta$ .

3) Nous laissons au lecteur le soin de faire la liste des conditions qui rendent la formule valable pour les nœuds de dimension supérieure.

*Preuve de la proposition.* Par exactitude à droite du produit tensoriel, on a :

$$A / (1-t^m) A \otimes \mathbb{Q} \approx A \otimes \mathbb{Q} / (1-t^m) (A \otimes \mathbb{Q}).$$

Donc:  $A / (1-t^m) A$  est de  $\mathbb{Z}$ -torsion si et seulement si  $1-t^m: A \otimes \mathbb{Q} \rightarrow A \otimes \mathbb{Q}$  est injectif (puisque le rang sur  $\mathbb{Q}$  de  $A \otimes \mathbb{Q}$  est fini).

Si l'on passe à une décomposition de  $A \otimes \mathbb{Q}$  en somme de modules cycliques, on voit que ceci a lieu si et seulement si  $(1-t^m)$  et  $\Delta$  n'ont pas de facteurs communs, c'est-à-dire si et seulement si  $\text{Rés}(1-t^m, \Delta) \neq 0$ .

Considérons alors le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & B & \rightarrow & A & \rightarrow & A/B \rightarrow 0 \\ & & \Phi_1 \downarrow & & \Phi_2 \downarrow & & \Phi_3 \downarrow \\ 0 & \rightarrow & B & \rightarrow & A & \rightarrow & A/B \rightarrow 0 \end{array}$$

où les homomorphismes  $\Phi_i$  sont la multiplication par  $(1-t^m)$ .

Si  $\text{Rés}(1-t^m, \Delta) \neq 0$ ,  $\text{Ker } \Phi_2 = 0$  et la suite Ker-Coker associée au diagramme précédent devient

$$0 \rightarrow \text{Ker } \Phi_3 \rightarrow \text{Coker } \Phi_1 \rightarrow \text{Coker } \Phi_2 \rightarrow \text{Coker } \Phi_3 \rightarrow 0.$$

Maintenant, comme  $A / (1-t^m) A$  est fini, on a

$$|\text{Ker } \Phi_3| = |\text{Coker } \Phi_3| \quad (\text{où } |E| \text{ désigne le cardinal de l'ensemble } E).$$

D'autre part,  $\text{Rés}(1-t^m, \Delta) \neq 0$  implique (cf. § 2) que  $|\text{Coker } \Phi_1|$  est fini. Donc  $|\text{Coker } \Phi_2|$  l'est aussi et la suite Ker-Coker implique  $|\text{Coker } \Phi_1| = |\text{Coker } \Phi_2|$ .

Il suffit donc de démontrer la formule de Fox pour le module  $B$  à la place du module  $A$ .

Si  $B$  est cyclique, cela résulte de la proposition du § 2. Si  $B$  est somme de modules cycliques, cela résulte de cette proposition et de la multiplicativité du résultant. C.q.f.d.

*Remarque.* L'argument ci-dessus basé sur la suite Ker-Coker indique pourquoi la démonstration de Fox (qui suppose plus ou moins implicitement que  $H_1(X_\infty, \mathbb{Z})$  est somme de modules cycliques) a permis de trouver néanmoins la formule correcte.