

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 25 (1979)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR UNE FORMULE DE R. H. FOX CONCERNANT L'HOMOLOGIE  
DES REVÊTEMENTS CYCLIQUES  
**Autor:** Weber, Claude  
**Kapitel:** 2. RÉSULTANTS  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-50382>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# SUR UNE FORMULE DE R. H. FOX CONCERNANT L'HOMOLOGIE DES REVÊTEMENTS CYCLIQUES

par Claude WEBER

## 1. INTRODUCTION

Dans [2] et dans [3], R. H. Fox a donné une formule exprimant l'ordre de l'homologie d'un revêtement cyclique de  $S^3$ , ramifié sur un nœud. L'exposition de Fox a été reprise par L. P. Neuwirth dans [7]. Comme l'a remarqué M. A. Gordon, [4] p. 17, la démonstration proposée par Fox demande quelques aménagements. Nous proposons ici une démonstration de cette formule, basée sur les deux principes suivants:

1. La formule est une conséquence facile de la définition du résultant de deux polynômes, dans le cas où l'homologie du revêtement cyclique infini du complémentaire du nœud est somme directe de modules cycliques.

2. Un raisonnement basé sur un argument dû à D. W. Sumners permet de se ramener au cas précédent.

Le fait qu'un nœud ne satisfait pas nécessairement les conditions énoncées dans 1 est connu des spécialistes du sujet. Nous revenons sur ce point au § 5.

Je tiens à remercier Daniel Lines dont les connaissances sur les résultants m'ont été fort utiles.

## 2. RÉSULTANTS

Dans ce paragraphe, nous rappelons quelques faits classiques concernant les résultants, qui nous seront nécessaires par la suite.

Soit  $R$  un anneau intègre et soient  $f$  et  $g$  deux polynômes à coefficients dans  $R$ :

$$\begin{aligned}f(t) &= a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_0 \\g(t) &= b_m t^m + \dots + b_0.\end{aligned}$$

Par définition, le résultant de  $f$  et  $g$ , noté  $\text{Rés}(f, g)$ , est égal au déterminant de la  $(m+n)$ -matrice carrée:

$$\begin{bmatrix} a_n & & & & b_m & & & & \\ a_{n-1} & a_n & & & \cdot & b_m & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \\ & \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \\ & \cdot & \cdot & & & \cdot & & \cdot & \\ & & & a_n & b_1 & & & & b_m \\ & & & \cdot & & & & & \cdot \\ & & & \cdot & & & & & \cdot \\ & & & \cdot & & & & & \cdot \\ a_0 & & & & b_0 & b_1 & & & \\ & a_0 & & & & b_0 & & & \\ & & & & & & \cdot & & \\ & & & & & & & \cdot & \\ & & & & & & & & \cdot \\ & & & & & & & & \\ & & & & a_0 & & & & b_0 \end{bmatrix}$$

THÉORÈME.

- a)  $\text{Rés}(f, g) = 0$  si et seulement si  $a_n = 0 = b_m$  ou si  $f$  et  $g$  ont une racine commune (dans une clôture algébrique  $\bar{K}$  du corps des fractions  $K$  de  $R$ ).
- b)  $\text{Rés}(f, g) = a_n^m b_m^n \prod_{i,j} (x_i - y_j)$
- si  $a_n \neq 0 \neq b_m$  où:  $\{x_1, \dots, x_n\}$  sont les racines de  $f$  dans  $\bar{K}$  et  $\{y_1, \dots, y_m\}$  celles de  $g$ .

COROLLAIRE.  $\text{Rés}(f, g_1 \cdot g_2) = \text{Rés}(f, g_1) \cdot \text{Rés}(f, g_2)$   
(multiplicativité du résultant).

Pour une démonstration, voir [10], pp. 102-106.

Désignons par  $T$  le groupe cyclique infini, noté multiplicativement, et de générateur  $t \in T$ . Soit  $RT$  l'anneau du groupe  $T$  sur  $R$ . Soit  $\alpha$

$= (P_1, \dots, P_r)$  un idéal de  $RT$ , engendré par  $P_1, \dots, P_r \in RT$ . ( $P_i \neq 0$ ). Comme  $\pm t^i$  est une unité de  $RT$ , on ne restreint pas la généralité en supposant que les  $P_i(t)$  sont de la forme:

$$P(t) = a_0 + \dots + a_n t^n \quad \text{avec} \quad a_0 \neq 0, n \geq 0.$$

Dans ce qui suit, nous supposons en général que les éléments de  $RT$  que nous considérons satisfont cette condition (\*). Nous dirons qu'un tel polynôme est biunitaire si  $a_0$  et  $a_n$  sont des unités de  $R$ .

PROPOSITION. Soient  $f$  et  $g \in \mathbb{Z}T$  deux polynômes non nuls et sans racine commune (dans  $\overline{\mathbb{Q}}$ ). Supposons  $f$  biunitaire.

Alors  $\mathbb{Z}T / (f, g)$  est un groupe fini et son ordre est égal à  $|\text{Rés}(f, g)|$ .

Remarques. 1) Bien sûr,  $\mathbb{Z}T / (f, g)$  est aussi un  $\mathbb{Z}T$ -module. Mais dans la suite, nous le considérerons comme un groupe abélien pour calculer son ordre, d'où la terminologie adoptée.

2) Dire que  $f$  et  $g$  sont sans racine commune revient à dire qu'ils sont premiers entre eux dans  $\mathbb{Q}T$ . Comme  $\mathbb{Z}T$  n'est pas principal, cela signifie (seulement) qu'il existe des éléments  $k$  et  $h \in \mathbb{Z}$  tels que

$$fk + gh = n \in \mathbb{Z}, n \neq 0.$$

En général,  $n \neq \pm 1$ . En fait, soit  $e(f, g)$  le plus petit entier strictement positif  $e$  tel qu'il existe  $k$  et  $h$  pour que

$$fk + gh = e.$$

Alors  $e(f, g)$  est l'exposant du groupe  $\mathbb{Z}T / (f, g)$  sans même qu'il soit nécessaire de supposer  $f$  biunitaire. Si c'est le cas,  $\text{Rés}(f, g)$  et  $e(f, g)$  ont mêmes diviseurs premiers, et rendent ainsi souvent les mêmes services. En bien des occasions, l'exposant est plus facile à calculer que l'ordre.

3) Une hypothèse du genre « biunitaire » est nécessaire, comme le montre l'exemple  $f(t) = 3t - 1$   $g(t) = 3t - 2$ . En ce cas  $\mathbb{Z}T / (f, g) = \{0\}$  car  $e(f, g) = 1$ , mais  $|\text{Rés}(f, g)| = 3$ .

Preuve de la proposition. Puisque  $f$  est biunitaire, le  $\mathbb{Z}T$ -module  $\mathbb{Z}T / (f)$  est isomorphe au  $\mathbb{Z}T$ -module

$$\mathcal{M} = \bigoplus_{i=0}^{n-1} \mathbb{Z} e_i$$

où

$$t(e_i) = e_{i+1}, i=0, 1, \dots, n-2,$$

$$t(e_{n-1}) = -\frac{1}{a_n} (a_{n-1} e_{n-1} + \dots + a_0).$$

Comme  $\left| -\frac{a_0}{a_n} \right| = 1$ ,  $t$  agit bien par un isomorphisme de  $\mathcal{M}$ . Notons  $\Phi: \mathbb{Z}T \bigg/ (f) \rightarrow \mathcal{M}$  l'isomorphisme donné par  $1 \rightarrow e_0$ . Puisque

$$\mathbb{Z}T \bigg/ (f, g) \approx \mathbb{Z}T \bigg/ (f) \bigg/ (\bar{g})$$

où  $\bar{g}$  désigne l'image de  $g$  dans  $\mathbb{Z}T \bigg/ (f)$ , on déduit que  $\mathbb{Z}T \bigg/ (f, g)$  est isomorphe au quotient de  $\mathcal{M}$  par le sous-module  $\mathcal{N}$  engendré par  $\Phi(\bar{g})$ .

*Affirmation:* Comme groupe abélien,  $\mathcal{N}$  est engendré par

$$\Phi(\bar{g}), \Phi(t\bar{g}), \dots, \Phi(t^{n-1}\bar{g}).$$

En effet,  $\mathcal{N}$  est certainement engendré par les  $\Phi(t^j \bar{g})$  pour  $j \in \mathbb{Z}$ . Mais

$$f \cdot g = (a_n t^n + \dots + a_0) \cdot g \quad \text{et} \quad \Phi(\bar{f} \cdot \bar{g}) = 0$$

Donc

$$\Phi(t^n \cdot \bar{g}) = -\frac{1}{a_n} \sum_{j=0}^{n-1} a_j \Phi(t^j \bar{g}).$$

Considérons maintenant les deux polynômes

$$f(t) = a_n t^n + \dots + a_0$$

$$g(t) = b_m t^m + \dots + b_0$$

avec  $f$  biunitaire et envisageons la  $(m+n)$ -matrice carrée dont le déterminant est  $\text{Rés}(f, g)$ . Par soustractions répétées des colonnes  $a$  aux colonnes  $b$ , on obtient, puisque  $|a_n| = 1$ , une matrice:

$m$ colonnes			$n$ colonnes		
$a_n$					
$a_{n-1}$	$a_n$			0	
.	.	.			
.	.				
.	.				
		$a_n$			
.			.		.
.			.		.
.	.		.		.
$a_0$	.		$\Phi(f^{n-1}\bar{g})$	.	$\Phi(\bar{g})$
	.			.	
	$a_0$			.	
		$a_0$	.	.	.
			.	.	.

Dans la matrice précédente,  $\Phi(f^j\bar{g})$  désigne un vecteur colonne dans la base  $(e_{n-1}, e_{n-2}, \dots, e_0)$ .

Comme  $|a_n| = 1$ , le groupe ainsi présenté est isomorphe à  $\mathcal{M} / \mathcal{N}$ .

Le déterminant de cette dernière matrice est égal, en valeur absolue, d'une part à l'ordre du groupe  $\mathcal{M} / \mathcal{N}$  et d'autre part, par construction, à  $\text{Rés}(f, g)$ . C.q.f.d.

### 3. REVÊTEMENTS CYCLIQUES DE $S^3$ , RAMIFIÉS SUR UN NŒUD

Soit  $K$  un nœud apprivoisé dans  $S^3$ . Désignons par  $X$  le complémentaire du nœud  $S^3 - K$ , par  $X_\infty$  le revêtement cyclique infini de  $X$ , par  $X_m$  le revêtement cyclique à  $m$  feuilles de  $X$ , par  $\hat{X}_m$  le revêtement cyclique à  $m$  feuilles de  $S^3$ , ramifié sur  $K$ .