Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 25 (1979)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR UNE FORMULE DE R. H. FOX CONCERNANT L'HOMOLOGIE DES REVÊTEMENTS CYCLIQUES

Autor: Weber, Claude

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-50382

SUR UNE FORMULE DE R. H. FOX CONCERNANT L'HOMOLOGIE DES REVÊTEMENTS CYCLIQUES

par Claude WEBER

1. INTRODUCTION

Dans [2] et dans [3], R. H. Fox a donné une formule exprimant l'ordre de l'homologie d'un revêtement cyclique de S^3, ramifié sur un nœud. L'exposition de Fox a été reprise par L. P. Neuwirth dans [7]. Comme l'a remarqué M. A. Gordon, [4] p. 17, la démonstration proposée par Fox demande quelques aménagements. Nous proposons ici une démonstration de cette formule, basée sur les deux principes suivants:

1. La formule est une conséquence facile de la définition du résultant de deux polynômes, dans le cas où l'homologie du revêtement cyclique infini du complémentaire du nœud est somme directe de modules cycliques.

2. Un raisonnement basé sur un argument dû à D. W. Sumners permet de se ramener au cas précédent.

Le fait qu'un nœud ne satisfait pas nécessairement les conditions énoncées dans 1 est connu des spécialistes du sujet. Nous revenons sur ce point au § 5.

Je tiens à remercier Daniel Lines dont les connaissances sur les résultants m'ont été fort utiles.

2. RÉSULTANTS

Dans ce paragraphe, nous rappelons quelques faits classiques concernant les résultants, qui nous seront nécessaires par la suite.

Soit R un anneau intègre et soient f et g deux polynômes à coefficients dans R:

$$f(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_0$$
$$g(t) = b_m t^m + \dots + b_0 .$$

Par définition, le résultant de f et g, noté Rés (f, g), est égal au déterminant de la $(m+n)$-matrice carrée:

$$\begin{bmatrix}
a_n & & & & b_m & & & \\
a_{n-1} & a_n & & & \cdot & b_m & & \\
\vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots & \ddots & \\
 & & & a_n & b_1 & & & b_m \\
 & & & \vdots & & & & \vdots \\
a_0 & & & & b_0 & b_1 & & \\
 & a_0 & & & & b_0 & \ddots & \\
 & & & a_0 & & & & b_0
\end{bmatrix}$$

THÉORÈME.

a) Rés $(f, g) = 0$ si et seulement si $a_n = 0 = b_m$ ou si f et g ont une racine commune (dans une clôture algébrique $\overline{K}$ du corps des fractions K de R).

b) Rés $(f, g) = a_n{}^m \, b_m{}^n \prod_{i,j} (x_i - y_j)$.

si $a_n \neq 0 \neq b_m$ où: $\{ x_1, ..., x_n \}$ sont les racines de f dans $\overline{K}$ et $\{ y_1, ..., y_m \}$ celles de g.

COROLLAIRE. Rés $(f, g_1 \,.\, g_2) =$ Rés (f, g_1) . Rés (f, g_2) (multiplicativité du résultant).

Pour une démonstration, voir [10], pp. 102-106.

Désignons par T le groupe cyclique infini, noté multiplicativement, et de générateur $t \in T$. Soit RT l'anneau du groupe T sur R. Soit α

$= (P_1, ..., P_r)$ un idéal de RT, engendré par $P_1, ..., P_r \in RT$. $(P_i \neq 0)$. Comme $\pm t^i$ est une unité de RT, on ne restreint pas la généralité en supposant que les $P_i(t)$ sont de la forme:

$$P(t) = a_0 + ... + a_n t^n \quad \text{avec} \quad a_0 \neq 0,\ n \geqslant 0\,.$$

Dans ce qui suit, nous supposerons en général que les éléments de RT que nous considérons satisfont cette condition (*). Nous dirons qu'un tel polynôme est biunitaire si a_0 et a_n sont des unités de R.

Proposition. Soient f et $g \in \mathbf{Z}T$ deux polynômes non nuls et sans racine commune (dans $\overline{\mathbf{Q}}$). Supposons f biunitaire.

Alors $\mathbf{Z}T \big/ (f, g)$ est un groupe fini et son ordre est égal à $|\,\text{Rés}\,(f, g)\,|$.

Remarques. 1) Bien sûr, $\mathbf{Z}T \big/ (f, g)$ est aussi un $\mathbf{Z}T$-module. Mais dans la suite, nous le considérerons comme un groupe abélien pour calculer son ordre, d'où la terminologie adoptée.

2) Dire que f et g sont sans racine commune revient à dire qu'ils sont premiers entre eux dans $\mathbf{Q}T$. Comme $\mathbf{Z}T$ n'est pas principal, cela signifie (seulement) qu'il existe des éléments k et $h \in \mathbf{Z}$ tels que

$$fk + gh = n \in \mathbf{Z}\,,\ n \neq 0\,.$$

En général, $n \neq \pm 1$. En fait, soit $e(f, g)$ le plus petit entier strictement positif e tel qu'il existe k et h pour que

$$fk + gh = e\,.$$

Alors $e(f, g)$ est l'exposant du groupe $\mathbf{Z}T \big/ (f, g)$ sans même qu'il soit nécessaire de supposer f biunitaire. Si c'est le cas, $\text{Rés}\,(f, g)$ et $e(f, g)$ ont mêmes diviseurs premiers, et rendent ainsi souvent les mêmes services. En bien des occasions, l'exposant est plus facile à calculer que l'ordre.

3) Une hypothèse du genre « biunitaire » est nécessaire, comme le montre l'exemple $f(t) = 3t - 1$ $g(t) = 3t - 2$. En ce cas $\mathbf{Z}T \big/ (f, g) = \{0\}$ car $e(f, g) = 1$, mais $|\,\text{Rés}\,(f, g)\,| = 3$.

Preuve de la proposition. Puisque f est biunitaire, le $\mathbf{Z}T$-module $\mathbf{Z}T \big/ (f)$ est isomorphe au $\mathbf{Z}T$-module

$$\mathcal{M} = \bigoplus_{i=0}^{n-1} \mathbf{Z}\, e_i$$

où

$$t(e_i) = e_{i+1},\, i=0,1, \ldots, n-2,$$

$$t(e_{n-1}) = -\frac{1}{a_n}(a_{n-1}\, e_{n-1} + \ldots + a_0)\,.$$

Comme $\left| -\dfrac{a_0}{a_n} \right| = 1$, t agit bien par un isomorphisme de $\mathcal{M}$. Notons $\Phi \colon \mathbf{Z}T \big/ (f) \to \mathcal{M}$ l'isomorphisme donné par $1 \to e_0$. Puisque

$$\mathbf{Z}T \big/ (f,g) \approx \mathbf{Z}T \big/ (f) \big/ (\bar{g})$$

où $\bar{g}$ désigne l'image de g dans $\mathbf{Z}T \big/ (f)$, on déduit que $\mathbf{Z}T \big/ (f,g)$ est isomorphe au quotient de $\mathcal{M}$ par le sous-module $\mathcal{N}$ engendré par $\Phi(\bar{g})$.

Affirmation : Comme groupe abélien, $\mathcal{N}$ est engendré par

$$\Phi(\bar{g}), \Phi(t\bar{g}), \ldots, \Phi(t^{n-1}\bar{g})\,.$$

En effet, $\mathcal{N}$ est certainement engendré par les $\Phi(t^j \bar{g})$ pour $j \in \mathbf{Z}$. Mais

$$f \cdot g = (a_n t^n + \ldots + a_0) \cdot g \quad \text{et} \quad \Phi(\bar{f} \cdot \bar{g}) = 0$$

Donc

$$\Phi(t^n \cdot \bar{g}) = -\frac{1}{a_n} \sum_{j=0}^{n-1} a_j\, \Phi(t^j \bar{g})\,.$$

Considérons maintenant les deux polynômes

$$f(t) = a_n t^n + \ldots + a_0$$
$$g(t) = b_m t^m + \ldots + b_0$$

avec f biunitaire et envisageons la $(m+n)$-matrice carrée dont le déterminant est Rés (f, g). Par soustractions répétées des colonnes a aux colonnes b, on obtient, puisque $|a_n| = 1$, une matrice:

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} \quad m \text{ colonnes} \qquad\qquad\qquad & \qquad\qquad n \text{ colonnes} \end{array}\\
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
a_n & & & & & \\
a_{n-1} & a_n & & & 0 & \\
\vdots & \vdots & \ddots & & & \\
 & & a_n & & & \\
\hline
\vdots & & & \vdots & & \vdots \\
a_0 & \vdots & & \Phi(f^{n-1}\bar{g}) & \cdots & \Phi(\bar{g}) \\
 & a_0 & & & & \\
 & & a_0 & \vdots & & \vdots
\end{array}\right]
\end{array}
$$

Dans la matrice précédente, $\Phi(f^j\bar{g})$ désigne un vecteur colonne dans la base $(e_{n-1}, e_{n-2}, \ldots, e_0)$.

Comme $|a_n| = 1$, le groupe ainsi présenté est isomorphe à $\mathcal{M}/\mathcal{N}$.

Le déterminant de cette dernière matrice est égal, en valeur absolue, d'une part à l'ordre du groupe $\mathcal{M}/\mathcal{N}$ et d'autre part, par construction, à Rés (f, g). C.q.f.d.

3. Revêtements cycliques de S^3, ramifiés sur un nœud

Soit K un nœud apprivoisé dans S^3. Désignons par X le complémentaire du nœud $S^3 - K$, par X_∞ le revêtement cyclique infini de X, par X_m le revêtement cyclique à m feuilles de X, par $\hat{X}_m$ le revêtement cyclique à m feuilles de S^3, ramifié sur K.

Considérons K et S^3 comme orientés. Alors, via des conventions fixées une fois pour toutes, on obtient un générateur t du groupe de Galois du revêtement $X_\infty \to X$.

Les « groupes » d'homologie $H_1(X_\infty, R)$, $H_1(\hat{X}_m, R)$ et $H_1(X_m, R)$ sont alors munis d'une structure de RT-modules, t agissant via Galois.

Les faits suivants sont bien connus. Pour une démonstration, voir [4].

(i) $H_1(X_\infty, \mathbf{Z})$ est un $\mathbf{Z}T$-module de type fini. (C'est essentiellement une conséquence du fait que $\mathbf{Z}T$ est nœthérien.)

(ii) $H_1(\hat{X}_m; R) \approx \operatorname{Coker}\{1 - t^m : H_1(X_\infty, R) \to H_1(X_\infty, R)\}$.
(C'est une conséquence de la « suite exacte de Milnor »).
Si l'on fait $m = 1$ dans la dernière égalité et si l'on utilise le fait que RT est nœthérien, on obtient que $1 - t : H_1(X_\infty, R) \to H_1(X_\infty; R)$ est un isomorphisme pour tout R nœthérien.

(iii) $H_1(X_\infty, \mathbf{Q})$ est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{Q}$.
(Conséquence facile du dernier argument par $R = \mathbf{Q}$.)
Le résultat suivant est dû à R. H. Crowell [1].

(iv) Soit A un $\mathbf{Z}T$-module admettant une présentation carrée (c'est-à-dire: nombre de générateurs égal au nombre de relations). Soit $\Delta \in \mathbf{Z}T$ le déterminant de cette présentation. (Δ est le générateur du premier idéal élémentaire de A.) Alors A est sans $\mathbf{Z}$-torsion si et seulement si Δ est « primitif » (c'est-à-dire si ses coefficients sont premiers entre eux).
Il est classique que $H_1(X_\infty; \mathbf{Z})$ satisfait les hypothèses du théorème de Crowell.
Le dernier fait dont nous aurons besoin est dû à M. Kervaire [5]:

(v) Soit A un $\mathbf{Z}T$-module de type fini et tel que la multiplication par $(1-t)$ soit un isomorphisme, alors le sous-groupe de $\mathbf{Z}$-torsion de A est fini.

4. La formule de R. H. Fox

Conformément à nos conventions du paragraphe précédent, désignons par $\hat{X}_m$ le revêtement cyclique à m feuilles de S^3, ramifié sur nœud de polynôme d'Alexander Δ. *La formule de Fox* s'énonce ainsi:

$H_1(\hat{X}_m; \mathbf{Z})$ est fini si et seulement si $\operatorname{Rés}(1-t^m, \Delta) \neq 0$. En ce cas l'ordre du groupe $H_1(\hat{X}_m; \mathbf{Z})$ est égal à $|\operatorname{Rés}(1-t^m, \Delta)|$.

L'essentiel du paragraphe sera consacré à la démonstration de cette formule.

Pour abréger, désignons par A un $\mathbf{Z}T$-module de type fini, sans $\mathbf{Z}$-torsion, et de rang fini sur $\mathbf{Q}$. Nous commençons par appliquer à A un argument dû à D. W. Sumners [8]. Comme A est sans $\mathbf{Z}$-torsion, on a une injection naturelle:

$$A \hookrightarrow A \otimes \mathbf{Q} .$$

$A \otimes \mathbf{Q}$ est un $\mathbf{Q}T$-module. Comme $\mathbf{Q}T$ est principal, on peut choisir un isomorphisme (de $\mathbf{Q}T$-modules):

$$A \otimes \mathbf{Q} \underset{\varphi}{\rightarrow} \oplus\, \mathbf{Q}T \big/ (\lambda_i) .$$

Comme A est de rang fini sur $\mathbf{Q}$, les polynômes λ_i sont différents de zéro. Sans restreindre la généralité, on peut les choisir à coefficients entiers, primitifs et satisfaisant la condition (*) du § 2.

Par Crowell, $\mathbf{Z}T \big/ (\lambda_i)$ est sans $\mathbf{Z}$-torsion et l'on a donc une injection de $\mathbf{Z}T$-modules:

$$\oplus\, \mathbf{Z}T \big/ (\lambda_i) \hookrightarrow \mathbf{Q}T \big/ (\lambda_i) \rightarrow A \otimes \mathbf{Q} .$$

Dans $A \otimes \mathbf{Q}$ se trouvent ainsi deux $\mathbf{Z}T$-modules de type fini, qui engendrent $A \otimes \mathbf{Q}$ sur $\mathbf{Q}$. Il s'agit de A et de $B = \bigoplus_i \mathbf{Z}T \big/ (\lambda_i)$.

Affirmation 1: Dans ces conditions, il existe un entier $b \neq 0$ tel que $b \,.\, B \subset A$. (Preuve évidente utilisant des systèmes finis de générateurs pour A et pour B.)

On obtient alors une suite exacte de $\mathbf{Z}T$-modules:

$$0 \rightarrow B \xrightarrow{.b} A \rightarrow A \big/ b \,.\, B \rightarrow 0$$

Affirmation 2: Le quotient $A \big/ b \,.\, B$ est un groupe abélien de torsion, d'exposant fini.

En effet, en inversant le rôle de A et B dans l'affirmation 1, il existe un entier $a \neq 0$ tel que $a \,.\, A \subset B$. Il est clair que $a \,.\, b$ annule $A \big/ b \,.\, B$.

Avertissement : Si λ et μ sont deux éléments non nuls de $\mathbf{Z}T$, sans facteurs communs, on a

$$\mathbf{Q}T\Big/_{(\lambda)} \oplus \mathbf{Q}T\Big/_{(\mu)} \approx \mathbf{Q}T\Big/_{(\lambda\mu)} .$$

Comme $\mathbf{Z}T$ n'est pas principal, on n'a en général pas

$$\mathbf{Z}T\Big/_{(\lambda)} \oplus \mathbf{Z}T\Big/_{(\mu)} \approx \mathbf{Z}T\Big/_{(\lambda\mu)} .$$

Ceci indique que le choix d'une décomposition de $A \otimes \mathbf{Q}$ en somme de modules cycliques n'est pas innocent. Nous reviendrons sur ce point au § 5.

PROPOSITION. Soit A un $\mathbf{Z}T$-module de type fini, sans $\mathbf{Z}$-torsion et de rang fini sur $\mathbf{Q}$. Supposons qu'on a une injection $B = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbf{Z}T\Big/_{(\lambda_i)} \hookrightarrow A$ telle que $A\Big/_{B}$ soit un groupe fini. Alors $A\Big/_{(1-t^m)\,A}$ est fini si et seulement si $\text{Rés}(1-t^m, \prod_{i=1}^{r} \lambda_i) \neq 0$ et dans ce cas l'ordre de $A\Big/_{(1-t^m)\,A}$ est égal à $\left|\,\text{Rés}\,(1-t^m, \prod_{i=1}^{r} \lambda_i)\,\right|$.

Remarques. 1) $\prod \lambda_i$ ne dépend que de A, puisqu'il s'agit d'un générateur primitif du premier idéal élémentaire de $A \otimes \mathbf{Q}$, normalisé, suivant nos conventions, pour que ce soit un « vrai » polynôme de terme constant non nul. (Seul son signe est encore libre.)

2) Si $A = H_1(X_\infty, \mathbf{Z})$, nous savons déjà que A satisfait les hypothèses de la proposition. De plus, la multiplication par $(1-t)$ est un isomorphisme de A. Comme $\mathbf{Z}T$ est nœthérien, ceci reste vrai pour n'importe quel module quotient de A. Ainsi $A\Big/_{B}$ satisfait les hypothèses du théorème de Kervaire.

Comme il est de $\mathbf{Z}$-torsion par l'affirmation 2, il est fini. Toutes les hypothèses de la proposition sont donc satisfaites, ce qui démontre la formule de Fox, puisque $\prod \lambda_i = \Delta$.

3) Nous laissons au lecteur le soin de faire la liste des conditions qui rendent la formule valable pour les nœuds de dimension supérieure.

Preuve de la proposition. Par exactitude à droite du produit tensoriel, on a :

$$A \Big/ _{(1-t^m)A} \otimes \mathbf{Q} \approx A \otimes \mathbf{Q} \Big/ _{(1-t^m)(A \otimes \mathbf{Q})} .$$

Donc: $A \Big/ _{(1-t^m)A}$ est de $\mathbf{Z}$-torsion si et seulement si $1 - t^m : A \otimes \mathbf{Q} \to A \otimes \mathbf{Q}$ est injectif (puisque le rang sur $\mathbf{Q}$ de $A \otimes \mathbf{Q}$ est fini).

Si l'on passe à une décomposition de $A \otimes \mathbf{Q}$ en somme de modules cycliques, on voit que ceci a lieu si et seulement si $(1-t^m)$ et Δ n'ont pas de facteurs communs, c'est-à-dire si et seulement si Rés $(1-t^m, \Delta) \neq 0$.

Considérons alors le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & B & \to & A & \to & A/B & \to & 0 \\ & & \Phi_1 \downarrow & & \Phi_2 \downarrow & & \Phi_3 \downarrow & & \\ 0 & \to & B & \to & A & \to & A/B & \to & 0 \end{array}$$

où les homomorphismes Φ_i sont la multiplication par $(1-t^m)$.
Si Rés $(1-t^m, \Delta) \neq 0$, Ker $\Phi_2 = 0$ et la suite Ker-Coker associée au diagramme précédent devient

$$0 \to \operatorname{Ker} \Phi_3 \to \operatorname{Coker} \Phi_1 \to \operatorname{Coker} \Phi_2 \to \operatorname{Coker} \Phi_3 \to 0 .$$

Maintenant, comme $A \Big/ _B$ est fini, on a

$$|\operatorname{Ker} \Phi_3| = |\operatorname{Coker} \Phi_3| \quad (\text{où } |E| \text{ désigne le cardinal de l'ensemble } E).$$

D'autre part, Rés $(1-t^m, \Delta) \neq 0$ implique (cf. § 2) que $|\operatorname{Coker} \Phi_1|$ est fini. Donc $|\operatorname{Coker} \Phi_2|$ l'est aussi et la suite Ker-Coker implique $|\operatorname{Coker} \Phi_1| = |\operatorname{Coker} \Phi_2|$.

Il suffit donc de démontrer la formule de Fox pour le module B à la place du module A.

Si B est cyclique, cela résulte de la proposition du § 2. Si B est somme de modules cycliques, cela résulte de cette proposition et de la multiplicativité du résultant. C.q.f.d.

Remarque. L'argument ci-dessus basé sur la suite Ker-Coker indique pourquoi la démonstration de Fox (qui suppose plus ou moins implicitement que $H_1(X_\infty, \mathbf{Z})$ est somme de modules cycliques) a permis de trouver néanmoins la formule correcte.

5. Exemples et commentaires

A. La première mention du fait que $H_1(X_\infty, \mathbf{Z})$ n'est pas nécessairement somme directe de $\mathbf{Z}T$-modules cycliques se trouve (à ma connaissance) dans une note de l'article de J. Milnor [6]. Voici une façon très simple de construire de tels nœuds.

Affirmation: Soit $K \subset S^3$ un nœud dont le polynôme d'Alexander est irréductible (sur $\mathbf{Q}$) et pour lequel $H_1(\hat{X}_2, \mathbf{Z})$ n'est pas un groupe cyclique. Alors $H_1(X_\infty, \mathbf{Z})$ n'est pas somme de modules cycliques.

En effet, l'irréductibilité du polynôme d'Alexander entraîne que, si $H_1(X_\infty, \mathbf{Z})$ était somme de modules cycliques, il serait en fait cyclique. Comme une présentation du groupe $H_1(\hat{X}_2; \mathbf{Z})$ est obtenue en remplaçant t par -1 dans une présentation du module $H_1(X_\infty; \mathbf{Z})$ (appliquer le § 3, (ii), pour $m = 2$ et le fait que $(1-t)$ est un isomorphisme), on déduirait que $H_1(\hat{X}_2, \mathbf{Z})$ serait cyclique. Contradiction.

Bien sûr, l'argument est susceptible de multiples généralisations. Mais il a l'avantage de permettre l'usage des tables! C'est ainsi qu'on découvre que le nœud 9_{35} satisfait les conditions de l'affirmation (cf. livre de Reidemeister).

En fait, il est facile de voir que 9_{35} est le nœud de pretzel (3, 3, 3). En appliquant la méthode classique pour obtenir une matrice de Seifert des nœuds de pretzel (cf., par exemple, H. Trotter [9]) on obtient la matrice de présentation suivante pour le module $H_1(X_\infty, \mathbf{Z})$:

$$\begin{pmatrix} 3(1-t) & 2t-1 \\ t-2 & 3(1-t) \end{pmatrix} .$$

D'où le polynôme d'Alexander $\Delta = 7t^2 - 13t + 7$ (irréductible sur R) et $H_1(\hat{X}_2, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}/_3 \oplus \mathbf{Z}/_9$.

Naturellement, on peut construire d'autres nœuds de pretzel sur le même principe.

B. L'argument basé sur la suite Ker-Coker (et a fortiori la formule de Fox) montrent que le choix de la décomposition en somme de modules cycliques sur $\mathbf{Q}T$ n'intervient pas pour calculer l'ordre de $H_1(\hat{X}_m; \mathbf{Z})$ lorsqu'il est fini.

Il est bien connu que, en revanche, le groupe lui-même dépend de la décomposition. L'exemple classique consiste en les nœuds 6_1 et 9_{46} (et $m=2$).

C. Il faut prendre garde au fait que la formule de Fox ne donne pas l'ordre de la $\mathbf{Z}$-torsion de $H_1(\hat{X}_m; \mathbf{Z})$ lorsque ce groupe n'est pas fini, contrairement à ce que la formulation utilisée par L. P. Neuwirth [7] laisse croire. En fait, comme nous l'avons vu, Rés $(1-t^m, \Delta)$ est nul dans le cas où $H_1(\hat{X}_m; \mathbf{Z})$ n'est pas fini.

L'exemple suivant montre que la détermination de l'ordre de la torsion de $H_1(\hat{X}_m; \mathbf{Z})$, lorsque ce groupe n'est pas fini est une question plus difficile.

Soient $P(t) = 1 - t + t^2$, $Q(t) = 6t^2 - 11t + 6$, $A_1 = \mathbf{Z}T \big/ P(t) \oplus \mathbf{Z}T \big/ Q(t)$

$$A_2 = \mathbf{Z}T \big/ P(t) \, . \, Q(t) \, .$$

D'après les résultats classiques de H. Seifert, A_1 et A_2 peuvent être réalisés comme $H_1(X_\infty, \mathbf{Z})$ de nœuds dans S^3.
Il n'est pas très difficile de voir que

$$A_1 \big/ (1-t)^6 A_1 \approx \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \oplus \text{ un 5-groupe de rang 2,}$$

$$A_2 \big/ (1-t^6) A_2 \approx \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \, .$$

La raison essentielle de ces comportements est que $P(t) = Q(t)$ sur le corps F_5.
Cet exemple montre, en particulier, que cette fois-ci, le choix de la décomposition sur QT n'est pas innocent.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Crowell, R. H. The group G'/G'' of a knot group G. *Duke Math. Jour. 30* (1963), pp. 349-354.

[2] Fox, R. H. Free differential calculus. III Subgroups. *Annals of Math. 59* (1954), pp. 196-210.

[3] —— A quick trip through knot theory. *Topology of 3-manifolds (ed. M. K. Fort Jr.).* Prentice Hall (1962), pp. 120-167.

[4] GORDON, C. Mc A. Some aspects of classical knot theory. *Lecture Notes in Mathematics. Springer, vol. 685* (1978), pp. 1-60.
[5] KERVAIRE, M. Les nœuds de dimension supérieure. *Bull. Soc. Math. France. 93* (1965), pp. 225-271.
[6] MILNOR, J. Infinite cyclic coverings. *Conference on the topology of manifolds.* Prindle, Weber et Schmidt (1968), pp. 115-133.
[7] NEUWIRTH, L. P. Knot groups. *Annals of Math. Studies, vol. 56* (1965).
[8] SUMNERS, D. W. Polynomial invariants and the integral homology of coverings of knots and links. *Inventiones Math. 15* (1972), pp. 78-90.
[9] TROTTER, H. Non invertible knots exist. *Topology 2* (1964), pp. 275-280.
[10] VAN DER WAERDEN, B. L. *Algebra, vol. I.* Ungar Publ. Co.

(Reçu le 8 mars 1979)

Claude Weber

Section de mathématiques
Université de Genève
2-4, rue du Lièvre
Case postale 124
1211 Genève 24