

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 25 (1979)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SINGULARITÉS DE KLEIN  
**Autor:** de la Harpe, P. / Siegfried, P.  
**Kapitel:** V.2. Le cas des autres polyèdres réguliers  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-50380>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 13.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

où les points représentent un diviseur dont le support est disjoint de  $|\sigma_0|$ . De l'équation  $\langle D_{\tilde{F}} | \sigma_0 \rangle = 0$ , on déduit alors

$$60 \langle \sigma_0 | \sigma_0 \rangle + 50 + 40 + 30 = 0$$

et la proposition. ■

*Remarques.* On aurait pu partir d'un polynôme  $\varphi'$  invariant par  $G$  et nul sur  $\mathcal{B}$ . On aurait alors obtenu les diviseurs associés à  $\eta^{12}$  sur  $M_{10,8}$ ,  $\xi\eta^{20}$  sur  $M_{6,4}$  et  $\eta^{30}$  sur  $M_{4,2}$ , d'où un diviseur associé à une fonction  $F'$  de la forme

$$D_{F'} = 60\sigma_0 + 48\sigma_{4,\alpha} + 42\sigma_{2,\beta} + 30\sigma_\gamma + \dots$$

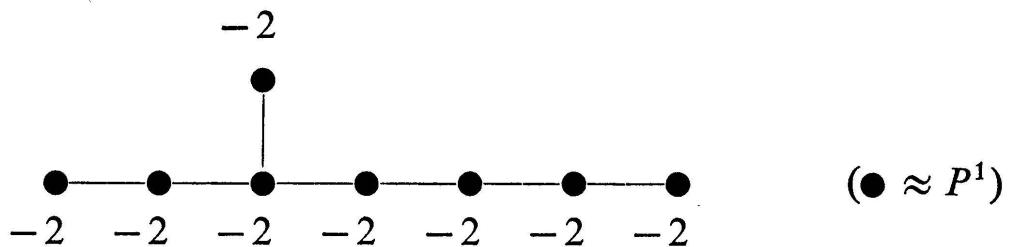
et une équation

$$60 \langle \sigma_0 | \sigma_0 \rangle + 48 + 42 + 30 = 0$$

On aurait enfin pu partir d'un polynôme  $\varphi''$  nul sur  $\mathcal{C}$ , d'où des diviseurs associés à  $\eta^{12}$  sur  $M_{10,8}$ ,  $\eta^{20}$  sur  $M_{6,4}$  et  $\xi\eta^{30}$  sur  $M_{4,2}$  et une équation

$$60 \langle \sigma_0 | \sigma_0 \rangle + 48 + 40 + 32 = 0.$$

**COROLLAIRE.** Le schéma de Dynkin associé à la résolution  $\pi_G \rho_i: M_{ico} \rightarrow X_{ico}$  est



et la matrice d'intersection associée est la matrice de Cartan  $E_8$ .

## V. 2. LE CAS DES AUTRES POLYÈDRES RÉGULIERS \*

Nous noterons dans cette section  $G_{ico}$  [respectivement  $G_{oct}$ ,  $G_{tet}$ ,  $D_n$ ] le sous-groupe de  $SO(3)$  des rotations qui laissent invariant un icosaèdre régulier [resp. octaèdre régulier, tétraèdre régulier, polygone plan régulier à  $n \geq 3$  sommets] inscrit dans  $S^2$  et  $G_{ico}$  [resp.  $G_{oct}$ ,  $G_{tet}$ ,  $D_n$ ] son image

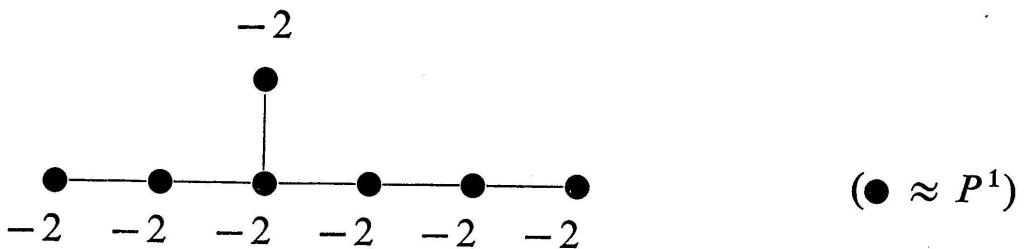
inverse par  $\delta^{-1}$  dans  $SU(2)$ . La section précédente est l'étude de l'espace  $X_{ico} = \mathbf{C}^2/G_{ico}$ , qui a un unique point singulier et qu'on a dit être isomorphe à la surface

$$A_{ico} = \{(x, y, z) \in \mathbf{C}^3 \mid z^5 = x^2 + y^3\}.$$

Soit  $X_{oct}$  le quotient de  $\mathbf{C}^2$  par  $G_{oct}$ . Il est isomorphe à la surface

$$A_{oct} = \{(x, y, z) \in \mathbf{C}^3 \mid z^2 = x(x^2 - y^3)\}.$$

On peut en construire, comme pour le cas précédent, une désingularisation  $M_{oct} \rightarrow X_{oct}$ . Les calculs du chapitre IV relatifs à  $X_{8,6}$ ,  $X_{6,4}$  et  $X_{4,2}$  et un calcul analogue à celui de la proposition 18 montrent que le diagramme de Dynkin associé est



et que la matrice d'intersection est la matrice de Cartan  $E_7$ .

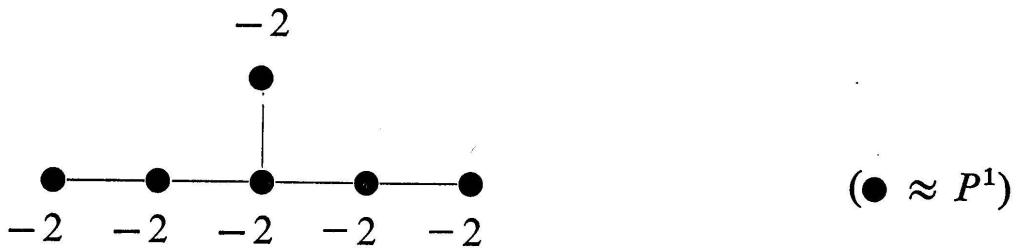
Contrairement à  $G_{ico}$ , le groupe  $G_{oct}$  n'est pas parfait. Son groupe dérivé est  $G_{tet}$  et son abélianisé  $\mathbf{Z}_2$ . Le quotient  $X_{tet}$  de  $\mathbf{C}^2$  par  $G_{tet} = (G_{oct}, G_{oct})$  est isomorphe à la surface

$$A_{tet} = \{(x, y, z) \in \mathbf{C}^3 \mid z^4 = x^2 + y^3\}.$$

(Pour l'isomorphisme, voir [12], chap. II, § 12 et [15], § 4.) On trouve aussi

$$A_{tet} = \{(x', y', z') \in \mathbf{C}^3 \mid y'^3 = x'(x' - z'^2)\},$$

ce qui correspond au changement de coordonnées  $x = x' - z'^2/2$ ,  $y = -y'$ ,  $z = z'/2$ . On obtient cette fois  $M_{tet} \rightarrow X_{tet}$ , où  $M_{tet}$  se fabrique en recollant deux copies de  $M_{6,4}$  et une copie de  $M_{4,2}$ . Le diagramme de Dynkin associé est



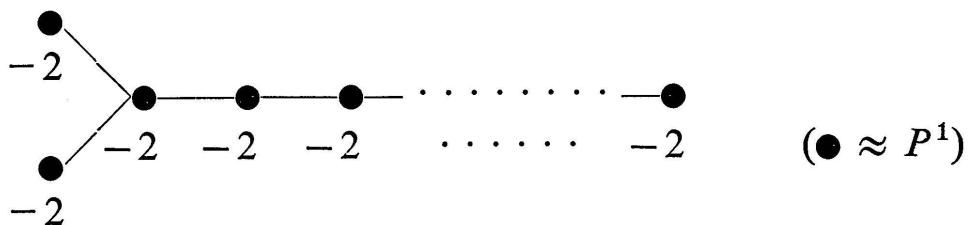
et la matrice d'intersection est la matrice de Cartan  $E_6$ .

L'analogue du théorème A de la section IV.3 s'énonce donc comme suit.

THÉORÈME E. Les désingularisations des ensembles analytiques à singularité unique  $\mathbf{C}^2/G$ , où  $G$  est l'un des trois groupes polyédraux binaires  $G_{ico}$ ,  $G_{oct}$ ,  $G_{tet}$ , définissent les schémas de Dynkin  $E_8$ ,  $E_7$  et  $E_6$ .

Le dernier théorème résume la situation qu'on obtiendrait en étudiant le cas des groupes diédraux binaires (voir [1]).

THÉORÈME D. Soient  $n \geq 3$  et  $X_n$  l'ensemble analytique quotient de  $\mathbf{C}^2$  par le groupe diédral binaire  $D_n$  (à  $4n$  éléments). On obtient une désingularisation  $M_n \rightarrow X_n$ , où  $M_n$  se fabrique en recollant deux copies de  $M_{4,2}$  et une copie de  $X_{2n,2}$ . Le schéma de Dynkin associé est



et la matrice d'intersection est la matrice de Cartan  $D_n$ .

On trouvera des renseignements complémentaires dans bien d'autres articles parmi lesquels nous citerons [10] et [20].

## RÉFÉRENCES

- [1] BEHNKE, K. und O. RIEMENSCHNEIDER. Diedersingularitäten. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* 47 (1978), pp. 210-227 et Infinitesimale Deformationen von Diedersingularitäten. *Manuscripta* 20 (1977), pp. 377-400.
- [2] BOCHNER, S. and W. T. MARTIN. *Several complex variables*. Princeton University Press 1948.
- [3] CARTAN, H. Quotient d'un espace analytique par un groupe d'automorphismes. *Algebraic geometry and algebraic topology, a symposium in honor of S. Lefschetz*, pp. 90-102, Princeton University Press 1957.
- [4] DURFEE, A. H. Fifteen characterizations of rational double points and simple critical points. *L'Enseignement math.* 25 (1979), pp. 131-163.
- [5] FISCHER, G. *Complex analytic geometry*. Springer Lecture Notes 538 (1976).
- [6] GODEMENT, R. *Cours d'algèbre*. Hermann 1963.
- [7] GUENOT, J. et R. NARASIMHAN. *Introduction à la théorie des surfaces de Riemann*. *L'Enseignement math.* 21 (1975), pp. 123-328.
- [8] GUNNING, R. C. and H. ROSSI. *Analytic functions of several complex variables*. Prentice Hall 1965.
- [9] HIRZEBRUCH, F. Über vierdimensionale Riemannsche Flächen mehrdeutiger analytischer Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen. *Math. Ann.* 126 (1953), pp. 1-22.