Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 25 (1979)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SINGULARITÉS DE KLEIN

Autor: de la Harpe, P. / Siegfried, P.

Kapitel: V.2. Le cas des autres polyèdres réguliers

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-50380

où les points représentent un diviseur dont le support est disjoint de $|\sigma_0|$. De l'équation $\langle D_{\tilde{F}} \mid \sigma_0 \rangle = 0$, on déduit alors

$$60 \langle \sigma_0 \mid \sigma_0 \rangle + 50 + 40 + 30 = 0$$

et la proposition. ■

Remarques. On aurait pu partir d'un polynôme φ' invariant par G et nul sur $\mathscr{B}$. On aurait alors obtenu les diviseurs associés à η^{12} sur $M_{10,8}$, $\xi\eta^{20}$ sur $M_{6,4}$ et η^{30} sur $M_{4,2}$, d'où un diviseur associé à une fonction F' de la forme

$$D_{F'} = 60\sigma_0 + 48\sigma_{4,\alpha} + 42\sigma_{2,\beta} + 30\sigma_\gamma + \ldots$$

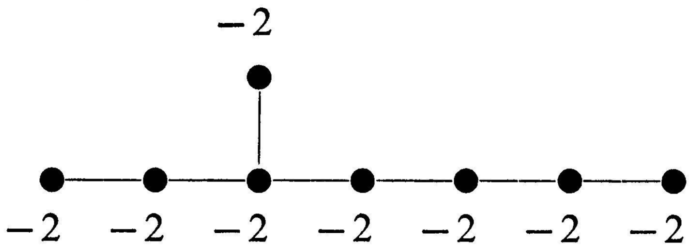
et une équation

$$60 \langle \sigma_0 \mid \sigma_0 \rangle + 48 + 42 + 30 = 0$$

On aurait enfin pu partir d'un polynôme φ'' nul sur $\mathscr{C}$, d'où des diviseurs associés à η^{12} sur $M_{10,8}$, η^{20} sur $M_{6,4}$ et $\xi\eta^{30}$ sur $M_{4,2}$ et une équation

$$60 \langle \sigma_0 \mid \sigma_0 \rangle + 48 + 40 + 32 = 0 .$$

Corollaire. Le schéma de Dynkin associé à la résolution $\pi_G \rho_i : M_{ico} \to X_{ico}$ est



($\bullet \approx P^1$)

et la matrice d'intersection associée est la matrice de Cartan E_8.

V. 2. Le cas des autres polyèdres réguliers

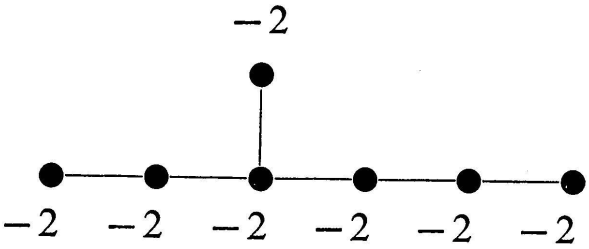
Nous noterons dans cette section $\underline{G}_{ico}$ [respectivement $\underline{G}_{oct}$, $\underline{G}_{tét}$, $\underline{D}_n$] le sous-groupe de $SO(3)$ des rotations qui laissent invariant un icosaèdre régulier [resp. octaèdre régulier, tétraèdre régulier, polygone plan régulier à $n \geqslant 3$ sommets] inscrit dans $\mathbf{S}^2$ et G_{ico} [resp. G_{oct}, $G_{tét}$, D_n] son image inverse par δ^{-1} dans $SU(2)$. La section précédente est l'étude de l'espace $X_{ico} = \mathbf{C}^2/G_{ico}$, qui a un unique point singulier et qu'on a dit être isomorphe à la surface

$$A_{ico} = \{(x, y, z) \in \mathbf{C}^3 \mid z^5 = x^2 + y^3\}.$$

Soit X_{oct} le quotient de $\mathbf{C}^2$ par G_{oct}. Il est isomorphe à la surface

$$A_{oct} = \{(x, y, z) \in \mathbf{C}^3 \mid z^2 = x(x^2 - y^3)\}.$$

On peut en construire, comme pour le cas précédent, une désingularisation $M_{oct} \to X_{oct}$. Les calculs du chapitre IV relatifs à $X_{8,6}$, $X_{6,4}$ et $X_{4,2}$ et un calcul analogue à celui de la proposition 18 montrent que le diagramme de Dynkin associé est



$(\bullet \approx P^1)$

et que la matrice d'intersection est la matrice de Cartan E_7.

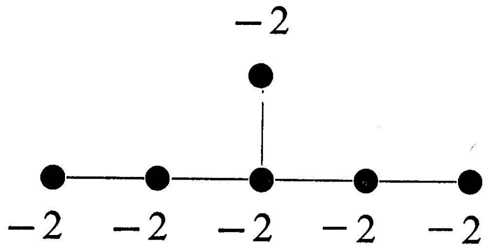
Contrairement à G_{ico}, le groupe G_{oct} n'est pas parfait. Son groupe dérivé est $G_{tét}$ et son abélianisé $\mathbf{Z}_2$. Le quotient $X_{tét}$ de $\mathbf{C}^2$ par $G_{tét} = (G_{oct}, G_{oct})$ est isomorphe à la surface

$$A_{tét} = \{(x, y, z) \in \mathbf{C}^3 \mid z^4 = x^2 + y^3\}.$$

(Pour l'isomorphisme, voir [12], chap. II, § 12 et [15], § 4.) On trouve aussi

$$A_{tét} = \{(x', y', z') \in \mathbf{C}^3 \mid y'^3 = x'(x' - z'^2)\},$$

ce qui correspond au changement de coordonnées $x = x' - z'^2/2$, $y = -y'$, $z = z'/2$. On obtient cette fois $M_{tét} \to X_{tét}$, où $M_{tét}$ se fabrique en recollant deux copies de $M_{6,4}$ et une copie de $M_{4,2}$. Le diagramme de Dynkin associé est



$(\bullet \approx P^1)$

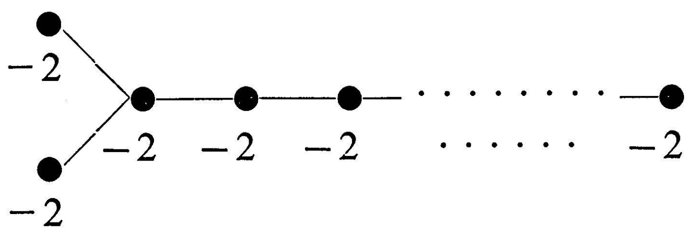
et la matrice d'intersection est la matrice de Cartan E_6.

L'analogue du théorème A de la section IV.3 s'énonce donc comme suit.

THÉORÈME E. Les désingularisations des ensembles analytiques à singularité unique $\mathbf{C}^2/G$, où G est l'un des trois groupes polyédraux binaires G_{ico}, G_{oct}, $G_{tét}$, définissent les schémas de Dynkin E_8, E_7 et E_6.

Le dernier théorème résume la situation qu'on obtiendrait en étudiant le cas des groupes diédraux binaires (voir [1]).

THÉORÈME D. Soient $n \geqslant 3$ et X_n l'ensemble analytique quotient de $\mathbf{C}^2$ par le groupe diédral binaire D_n (à $4n$ éléments). On obtient une désingularisation $M_n \to X_n$, où M_n se fabrique en recollant deux copies de $M_{4,2}$ et une copie de $X_{2n,2}$. Le schéma de Dynkin associé est



(● ≈ P^1)

et la matrice d'intersection est la matrice de Cartan D_n.

On trouvera des renseignements complémentaires dans bien d'autres articles parmi lesquels nous citerons [10] et [20].

RÉFÉRENCES

[1] BEHNKE, K. und O. RIEMENSCHNEIDER. Diedersingularitäten. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 47* (1978), pp. 210-227 *et* Infinitesimale Deformationen von Diedersingularitäten. *Manuscripta 20* (1977), pp. 377-400.

[2] BOCHNER, S. and W. T. MARTIN. *Several complex variables.* Princeton University Press 1948.

[3] CARTAN, H. Quotient d'un espace analytique par un groupe d'automorphismes. *Algebraic geometry and algebraic topology, a symposium in honor of S. Lefschetz*, pp. 90-102, Princeton University Press 1957.

[4] DURFEE, A. H. Fifteen characterizations of rational double points and simple critical points. *L'Enseignement math. 25* (1979), pp. 131-163.

[5] FISCHER, G. *Complex analytic geometry.* Springer Lecture Notes *538* (1976).

[6] GODEMENT, R. *Cours d'algèbre.* Hermann 1963.

[7] GUENOT, J. et R. NARASIMHAN. *Introduction à la théorie des surfaces de Riemann. L'Enseignement math. 21* (1975), pp. 123-328.

[8] GUNNING, R. C. and H. ROSSI. *Analytic functions of several complex variables.* Prentice Hall 1965.

[9] HIRZEBRUCH, F. Über vierdimensionale Riemannsche Flächen mehrdeutiger analytischer Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen. *Math. Ann. 126* (1953), pp. 1-22.