

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 25 (1979)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SINGULARITÉS DE KLEIN  
**Autor:** de la Harpe, P. / Siegfried, P.  
**Kapitel:** V. L'ICOSAÈDRE ET LES SOUS-GROUPES FINIS NON CYCLIQUES DE SU (2)  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-50380>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 23.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

convenable  $r$  (nous avons utilisé ici les remarques qui précèdent la proposition 13). Avec les notations de la section 2, on a précisément  $\lambda = \lambda_2$  et  $2 + r = b_1$ .

En cherchant à itérer l'argument jusqu'à trouver une surface lisse, on aurait précisément à considérer les suites numériques de la section 2.

## V. L'ICOSAÈDRE ET LES SOUS-GROUPES FINIS NON CYCLIQUES DE $SU(2)$

### V.1. LE CAS DE L'ICOSAÈDRE

Soient  $h: \mathbf{C}^2 - \{0\} \rightarrow P^1 = \mathbf{S}^2$  la projection canonique et  $\delta: SU(2) \rightarrow SO(3)$  le revêtement universel (à deux feuillets) du groupe des automorphismes analytiques isométriques de  $P^1$  (= du groupe des rotations de la sphère). Soient  $\underline{G}$  le sous-groupe de  $SO(3)$  des rotations qui laissent invariant un icosaèdre régulier inscrit dans  $\mathbf{S}^2$ , et  $G = \delta^{-1}(\underline{G})$ ; nous noterons encore  $\delta$  la projection canonique de  $G$  sur  $\underline{G}$ . Le groupe  $\underline{G}$  a 60 éléments; ses orbites sur  $\mathbf{S}^2$  ont aussi 60 points à trois exceptions près qui sont

l'orbite  $\underline{\mathcal{A}} = \{ \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{12} \}$  des sommets de l'icosaèdre

l'orbite  $\underline{\mathcal{B}} = \{ \underline{b}_1, \dots, \underline{b}_{20} \}$  des barycentres de ses faces

l'orbite  $\underline{\mathcal{C}} = \{ \underline{c}_1, \dots, \underline{c}_{30} \}$  des milieux de ses arêtes.

Le groupe  $G$  agit linéairement dans  $\mathbf{C}^2$ ; ses orbites ont toutes 120 points, à la seule exception de l'origine.

Le quotient  $X_{ico} = \mathbf{C}^2/G$  est un ensemble analytique, normal par le théorème de Cartan; il a un unique point non lisse, que nous noterons  $x_0$  et qui est l'image canonique de l'origine de  $\mathbf{C}^2$ . Nous renvoyons à [12], chapitre II, § 13 et/ou à [15], théorème 4.5 pour le résultat classique suivant (dont nous ne faisons pas usage ci-dessous): il existe une application polynômiale  $\tilde{\phi}: \mathbf{C}^2 \rightarrow \mathbf{C}^3$  qui fournit par passage au quotient un isomorphisme  $\phi$  de  $X_{ico}$  sur la surface de  $\mathbf{C}^3$  à singularité unique

$$A_{ico} = \{ (x, y, z) \in \mathbf{C}^3 \mid z^5 = x^2 + y^3 \}.$$

Le but de cette section est d'exhiber une désingularisation de  $X_{ico}$ . La première étape consiste à remplacer l'unique singularité  $x_0$  par trois singularités d'un type connu, et ceci grâce à un premier éclatement.

Le groupe  $SU(2)$  agit sur l'éclaté de  $\mathbb{C}^2$  à l'origine: si  $\sigma \in SU(2)$  et  $([z], w) \in S \subset P^1 \times \mathbb{C}^2$ , alors  $\sigma([z], w) = (\delta(\sigma)[z], \sigma w)$ . L'éclatement  $\pi: S \rightarrow \mathbb{C}^2$  est alors équivariant pour  $SU(2)$ . Avec les coordonnées locales de la section I.3, l'action d'un élément  $\sigma = \begin{pmatrix} fg \\ hj \end{pmatrix}$  dans  $SU(2)$  sur  $S$  est décrite par

$$\left\{ \begin{array}{l} \{ (u, v) \in \psi_0(S_0) \mid f + gu \neq 0 \} \rightarrow \{ (u, v) \in \psi_0(S_0) \mid j - gu \neq 0 \} \\ (u, v) \mapsto \left( \frac{h + ju}{f + gu}, f v + guv \right) \end{array} \right.$$

et par

$$\left\{ \begin{array}{l} \{ (u, v) \in \psi_1(S_1) \mid j + hu \neq 0 \} \rightarrow \{ (u, v) \in \psi_1(S_1) \mid f - hu \neq 0 \} \\ (u, v) \mapsto \left( \frac{fu + g}{hu + j}, huv + jv \right) \end{array} \right.$$

Nous noterons  $p: S \rightarrow S/G$  le morphisme quotient. L'éclatement passe au quotient modulo  $G$  et définit un morphisme  $\pi_G$ , propre et surjectif, rendant le diagramme

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{p} & S/G \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi_G \\ \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{\quad} & X_{ico} \end{array}$$

commutatif. Si  $E$  est la fibre exceptionnelle de  $\pi$ , alors celle de  $\pi_G$  est  $\pi_G^{-1}(x_0) = E/G$  et la restriction  $S/G - E/G \rightarrow X_{ico} - \{x_0\}$  de  $\pi_G$  est un isomorphisme. Par suite, toute résolution de  $S/G$  fournit par composition avec  $\pi_G$  une résolution de  $X_{ico}$ .

Comme tout quotient de  $P^1$  par un groupe fini, l'ensemble analytique  $E/G$  est homéomorphe à  $P^1$  lui-même. On sait d'ailleurs expliciter: consi-

dérons par exemple la fonction méromorphe  $\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{C} \dashrightarrow \mathbb{C} \\ z \dashrightarrow \frac{H^3}{1728f^5} \end{array} \right.$  où  $H(z)$

$= -(z^{20} + 1) + 228(z^{15} - z^5) - 494z^{10}$  et  $f(z) = z(z^{10} + 11z^5 - 1)$ ; son prolongé à la droite projective  $E$  passe au quotient et définit l'homéo-

morphisme  $E/G \rightarrow P^1$  (voir [12], § 13 et § 14). Mais nous voulons plutôt étudier le plongement de  $E/G$  dans  $S/G$ , c'est-à-dire le morphisme  $p$  au voisinage de  $E$ . Les points de  $S$  où le sous-groupe d'isotropie de  $G$  n'est pas trivial sont précisément ceux de  $\underline{\mathcal{A}} \cup \underline{\mathcal{B}} \cup \underline{\mathcal{C}}$ , considéré comme sous-ensemble de  $E = \pi^{-1}(0)$ . Par suite  $S/G$  est un ensemble analytique lisse, sauf aux trois points  $\alpha = \underline{\mathcal{A}}/G$ ,  $\beta = \underline{\mathcal{B}}/G$  et  $\gamma = \underline{\mathcal{C}}/G$ . La prochaine étape consiste à analyser la singularité de  $S/G$  en  $\alpha$ .

Choisissons un point  $\underline{a}$  de  $\underline{\mathcal{A}}$  et soit  $a$  la droite correspondante dans  $\mathbb{C}^2$ . Le sous-groupe d'isotropie de  $\underline{G}$  en  $\underline{a}$  est cyclique à 5 éléments. Son image inverse  $G_a$  par  $\delta$  est le sous-groupe des éléments de  $G$  laissant (globalement) invariante la droite  $a$ ; il est cyclique d'ordre 10. Choisissons des coordonnées sur  $\mathbb{C}^2$  telles que  $a$  soit la droite d'équation  $y = 0$  et que les éléments de  $G_a$  soient représentés par des matrices  $\begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^{-1} \end{pmatrix}$  où  $\omega$  est une racine dixième de l'unité. L'action d'un tel élément sur  $S$  s'écrit alors dans les cartes

$$\begin{cases} \mathbb{C}^2 = \psi_0(S_0) \rightarrow \psi_0(S_0) \\ (u, v) \mapsto (\omega^{-2}u, \omega v) \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbb{C}^2 = \psi_1(S_1) \rightarrow \psi_1(S_1) \\ (u, v) \mapsto (\omega^2u, \omega^{-1}v) \end{cases}$$

Le choix des coordonnées permet donc de considérer que  $G_a$  agit *linéairement*. En comparant avec le chapitre III, on voit de plus que la singularité en  $\alpha$  est du type  $\mathbb{C}^2/G_a = \mathbb{C}^2/G_{10,8} = X_{10,8}$ . On montre de même que les singularités en  $\beta$  et  $\gamma$  sont respectivement du type  $X_{6,4}$  et  $X_{4,2}$ .

Il n'y a donc plus qu'à recoller les résultats du chapitre IV. Il existe ainsi un voisinage  $U_\alpha$  de  $\alpha$  dans  $S/G$  (ne contenant ni  $\beta$  ni  $\gamma$ ), un voisinage  $V_\alpha$  du point singulier dans  $X_{10,8}$ , une variété lisse  $W_\alpha$  isomorphe à  $\tilde{\rho}^{-1}(V_\alpha)$ , des isomorphismes  $\kappa_\alpha$  et  $K_\alpha$  rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} W_\alpha & \xrightarrow{K_\alpha} & \tilde{\rho}^{-1}(V_\alpha) & \hookrightarrow & M_{10,8} \\ \downarrow \rho_{i,\alpha} & & \downarrow & & \downarrow \tilde{\rho} \\ S/G \longleftarrow U_\alpha & \xrightarrow{\kappa_\alpha} & V_\alpha & \hookrightarrow & X_{10,8} \end{array}$$

et des données analogues correspondant à  $\beta$  et  $\gamma$ . Les variétés  $W_\alpha$ ,  $W_\beta$  et  $W_\gamma$  se recollent en une variété lisse  $M_{ico}$ ; les morphismes  $\rho_{i,\alpha}$ ,  $\rho_{i,\beta}$  et  $\rho_{i,\gamma}$  se recollent en une désingularisation  $\rho_i: M_{ico} \rightarrow S/G$ . De plus, on a les propriétés suivantes:



- ( $\alpha$ ) Notons  $\tilde{a}/G$  l'image par  $p$  de la transformée stricte de  $a$ . Alors  $\kappa_\alpha$  applique  $(\tilde{a}/G) \cap U_\alpha$  sur  $[\{(0, t)\}/G_{10,8}] \cap V_\alpha$  et  $(E/G) \cap U_\alpha$  sur  $[\{(s, 0)\}/G_{10,8}] \cap V_\alpha$ . L'isomorphisme  $K_\alpha$  applique  $\tilde{\rho}_i^{-1}(\tilde{a}/G) \cap W_\alpha$  et  $\tilde{\rho}_i^{-1}(E/G) \cap W_\alpha$  dans les courbes notées  $\sigma_{in}$  et  $\sigma_{fi}$  à la section IV.3.
- ( $\beta$ ) De même,  $\rho_i$  est au-dessus de  $\beta$  du même type que  $M_{6,4} \rightarrow X_{6,4}$ . L'isomorphisme  $\kappa_\beta$  fait correspondre  $E/G$  à  $\{(s, 0)\}/G_{6,4}$  et  $K_\beta$  fait correspondre  $\tilde{\rho}_i^{-1}(E/G)$  au  $\sigma_{fi}$  de  $M_{6,4}$ .
- ( $\gamma$ ) De même,  $\rho_i$  est au-dessus de  $\gamma$  du même type que  $M_{4,2} \rightarrow X_{4,2}$ . L'isomorphisme  $\kappa_\gamma$  fait correspondre  $E/G$  à  $\{(s, 0)\}/G_{4,2}$  et  $K_\gamma$  fait correspondre  $\tilde{\rho}_i^{-1}(E/G)$  au  $\sigma_{fi}$  de  $M_{4,2}$ .

Par suite,  $\pi_G \rho_i: M_{ico} \rightarrow X_{ico}$  est une résolution de la singularité  $x_0$  de  $X_{ico} = \mathbb{C}^2/G$ . Sa fibre exceptionnelle contient 8 courbes irréductibles sans point triple, à intersections transverses, toutes isomorphes à  $P^1$ , et que nous noterons comme suit:

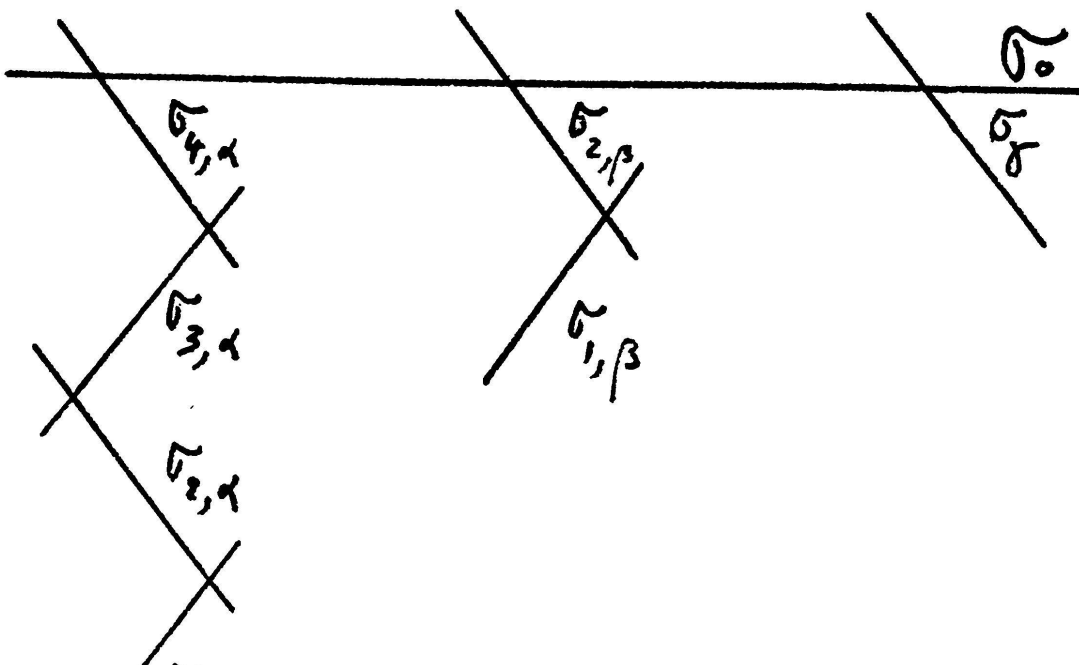
$$\sigma_0 = \tilde{\rho}_i^{-1}(E/G)$$

$\sigma_{j,\alpha}$  correspondant aux  $\sigma_j$  de  $M_{10,8}$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ )

$\sigma_{j,\beta}$  correspondant aux  $\sigma_j$  de  $M_{6,4}$  ( $j = 1, 2$ )

$\sigma_\gamma$  correspondant à  $\sigma_1$  dans  $M_{4,2}$ .

Les calculs de la section IV.3 montrent que l'intersection de deux de ces courbes est 0 ou 1, et vaut 1 si et seulement si elles se coupent dans le diagramme suivant:



Les auto-intersections des  $\sigma_{j,\alpha}$ ,  $\sigma_{j,\beta}$ ,  $\sigma_\gamma$  sont toutes  $-2$  vu la proposition 17 et la propriété de la forme d'intersection rappelée à la section IV.1 sous (vj). Pour connaître la matrice d'intersection de la résolution  $\pi_G \rho_i: M_{ico} \rightarrow X_{ico}$ , il reste donc à calculer l'auto-intersection de  $\sigma_0$ .

PROPOSITION 18. On a  $\langle \sigma_0 | \sigma_0 \rangle = -2$ .

*Première étape de la preuve :* définition de la fonction holomorphe  $\tilde{F}$  sur  $M_{ico}$ .

Ecrivons  $\mathcal{A} = h^{-1}(\underline{\mathcal{A}}) \cup \{0\} = \{a_1, \dots, a_{12}\}$  où chaque  $a_j$  est une droite de  $\mathbb{C}^2$  passant par l'origine. La transformée stricte  $\tilde{\mathcal{A}}$  de  $\mathcal{A}$  consiste en 12 « droites » disjointes de  $S$ ; comme nous l'avons déjà fait ci-dessus (pour définir  $\alpha \in E/G$ ), on peut identifier  $\tilde{\mathcal{A}} \cap E$  à  $\underline{\mathcal{A}}$ .

Soit  $\varphi$  un polynôme homogène de degré 120 sur  $\mathbb{C}^2$  invariant par  $G$  et s'annulant sur  $\mathcal{A}$ . (Un tel polynôme s'obtient en multipliant un polynôme de degré 1 nul sur  $a_1$  par ses transformés par  $G$ .) Soit  $f = \varphi \cdot \pi$ , qui s'annule sur  $E$  et sur les transformés strictes  $\tilde{a}_j$  des  $a_j$ ; plus précisément

$$D_f = nE + \sum_{j=1}^{12} 10 \tilde{a}_j$$

où  $n$  est un entier que l'on calcule ci-dessous. La fonction  $f$  est invariante par  $G$ , donc définit une fonction holomorphe  $F$  sur  $S/G$ . La « droite »  $\tilde{a}/G$  est l'image par  $p$  de chacune des « droites »  $\tilde{a}_j$ . La fonction  $F$  s'annule donc sur  $E/G$  et sur  $\tilde{a}/G$  avec

$$D_F = \frac{n}{120} (E/G) + 12 (a/G).$$

Enfin, la fonction annoncée  $\tilde{F}$  est la composition  $F\rho_i$ .

*Deuxième étape :* calcul du diviseur de  $F$ .

Considérons à nouveau sur  $\mathbb{C}^2$  les coordonnées  $(x, y)$  telles que  $a_1$  soit l'axe d'équation  $y = 0$  et tel que les éléments du groupe d'isotropie  $G_{a_1}$  soient représentés par  $\begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^{-1} \end{pmatrix}$  avec  $\omega^{10} = 1$ . Alors  $\varphi(x, y)$

$$= y^{10} \prod_{k=1}^{11} (x - \lambda_k y)^{10} \text{ avec les } \lambda_k \text{ des nombres complexes distincts}$$

(exercice facile: l'un d'entre eux est nul). Puis, avec  $\pi_0$  et  $\pi_1$  comme à la section I.3,  $f_0 = \varphi\pi_0: \psi_0(S_0) \rightarrow \mathbb{C}$  et  $f_1 = \varphi\pi_1: \psi_1(S_1) \rightarrow \mathbb{C}$  sont donnés par

$$f_0(u, v) = \varphi(v, uv) = u^{10} v^{120} \prod_{k=1}^{11} (1 - \lambda_k u)^{10}$$

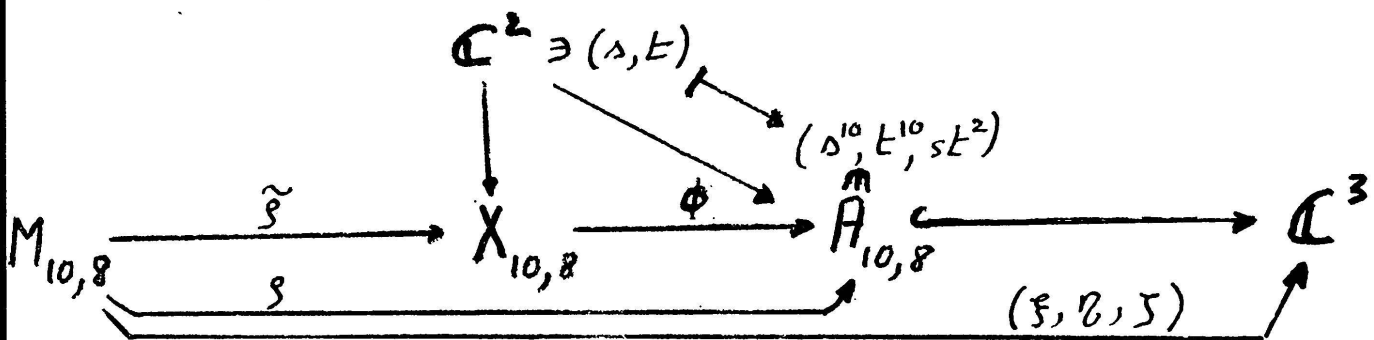
$$f_1(u, v) = \varphi(uv, v) = v^{120} \prod_{k=1}^{11} (u - \lambda_k)^{10}.$$

Comme  $E_j = \psi_j(S_j \cap E) = \{(u, v) \in \mathbb{C}^2 \mid v = 0\}$  ( $j = 0, 1$ ), les diviseurs de  $f$  et de  $F$  sont

$$D_f = 120 E + \sum_{j=1}^{12} 10 \tilde{a}_j \quad D_F = E/G + 12(\tilde{a}/G).$$

Troisième étape: calcul du diviseur de  $\tilde{F}$  au voisinage de  $\rho_i^{-1}(\alpha)$ .

Soit  $H_\alpha: X_{10,8} \rightarrow \mathbb{C}$  l'application définie par le polynôme  $s^{10}t^{120}$  sur  $\mathbb{C}^2$ . Rappelons des sections précédentes que l'on a



et que

$$\phi^{-1}[\{(x, 0, 0)\}] = \{(s, 0)\}/G_{10,8} \quad \phi^{-1}[\{(0, y, 0)\}] = \{(0, t)\}/G_{10,8}$$

$$\tilde{\rho}^{-1}[\{(s, 0)\}/G_{10,8}] = \sigma_{fi} \quad \tilde{\rho}^{-1}[\{(0, t)\}/G_{10,8}] = \sigma_{in}$$

$$\tilde{\rho}^{-1}[\{(0, 0)\}/G_{10,8}] = \sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \sigma_3 \cup \sigma_4.$$

Par suite

$$D_{H_\alpha} = [\{(s, 0)\}/G_{10,8}] + 12[\{(0, t)\}/G_{10,8}]$$

et le diviseur de  $H_\alpha \tilde{\rho} = \xi \eta^{12}$  est  $D_\xi + 12 D_\eta$ .

Si  $F_\alpha$  est la restriction de  $F$  à  $U_\alpha$ , il résulte de l'expression de  $D_F$  que  $F_\alpha \kappa_\alpha^{-1}$  et la restriction de  $H_\alpha$  à  $V_\alpha$  ont même diviseur, donc que  $D_{\tilde{F}}$  au voisinage de  $\rho_i^{-1}(\alpha)$  correspond à  $D_\xi + 12 D_\eta$ . En recopiant dans la preuve

de la proposition 17 et avec les notations introduites peu avant la proposition 18, on voit que  $D_{\tilde{F}}$  est donné dans le voisinage de  $\rho_i^{-1}(\alpha)$  par

$$10\sigma_{in,\alpha} + 8\sigma_{1,\alpha} + 6\sigma_{2,\alpha} + 4\sigma_{3,\alpha} + 2\sigma_{4,\alpha} \\ + 12(\sigma_{1,\alpha} + 2\sigma_{2,\alpha} + 3\sigma_{3,\alpha} + 4\sigma_{4,\alpha} + 5\sigma_0)$$

ou encore par

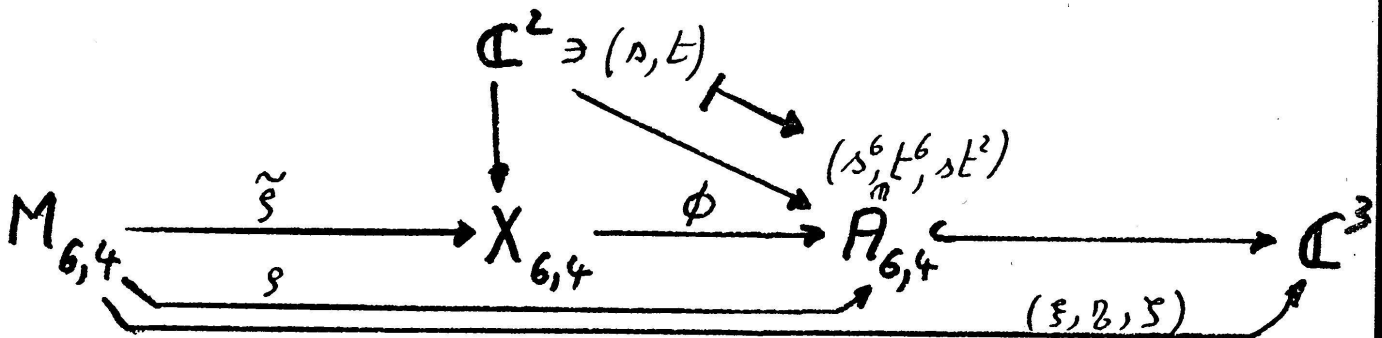
$$60\sigma_0 + 50\sigma_{4,\alpha} + \dots$$

ou les points représentent un diviseur dont le support est disjoint de  $|\sigma_0|$ .

*Quatrième étape :* calcul de  $D_{\tilde{F}}$  au voisinage de  $\rho_i^{-1}(\beta)$  et de  $\rho_i^{-1}(\gamma)$ .

On peut choisir  $U_\beta$  de telle sorte qu'il ne rencontre pas  $\tilde{a}/G$ . Le diviseur de la restriction  $F_\beta$  de  $F$  à  $U_\beta$  coïncide alors avec  $(E/G) \cap U_\beta$ .

Soit  $H_\beta: X_{6,4} \rightarrow \mathbb{C}$  l'application définie par le polynôme  $t^{120}$  sur  $\mathbb{C}^2$ . Rappelons que



Par suite, le diviseur de  $H_\beta$  est  $20 [\{ (0, t) \} / G_{6,4}]$  et le diviseur de  $H_\beta \rho = \eta^{20}$  est  $20 D_\eta$ . On voit donc que  $D_{\tilde{F}}$  est donné dans le voisinage de  $\rho_i^{-1}(\beta)$  par

$$20(\sigma_{1,\beta} + 2\sigma_{2,\beta} + 3\sigma_0) = 60\sigma_0 + 40\sigma_{2,\beta} + 20\sigma_{1,\beta}.$$

De même, il est donné au voisinage de  $\rho_i^{-1}(\gamma)$  par

$$30(\sigma_\gamma + 2\sigma_0) = 60\sigma_0 + 30\sigma_\gamma.$$

*Dernière étape :* calcul de l'auto-intersection de  $\sigma_0$ .

En résumé:

$$D_{\tilde{F}} = 60\sigma_0 + 50\sigma_{4,\alpha} + 40\sigma_{2,\beta} + 30\sigma_\gamma + \dots$$

où les points représentent un diviseur dont le support est disjoint de  $|\sigma_0|$ .  
De l'équation  $\langle D_{\tilde{F}} | \sigma_0 \rangle = 0$ , on déduit alors

$$60 \langle \sigma_0 | \sigma_0 \rangle + 50 + 40 + 30 = 0$$

et la proposition. ■

*Remarques.* On aurait pu partir d'un polynôme  $\varphi'$  invariant par  $G$  et nul sur  $\mathcal{B}$ . On aurait alors obtenu les diviseurs associés à  $\eta^{12}$  sur  $M_{10,8}$ ,  $\xi\eta^{20}$  sur  $M_{6,4}$  et  $\eta^{30}$  sur  $M_{4,2}$ , d'où un diviseur associé à une fonction  $F'$  de la forme

$$D_{F'} = 60 \sigma_0 + 48 \sigma_{4,\alpha} + 42 \sigma_{2,\beta} + 30 \sigma_\gamma + \dots$$

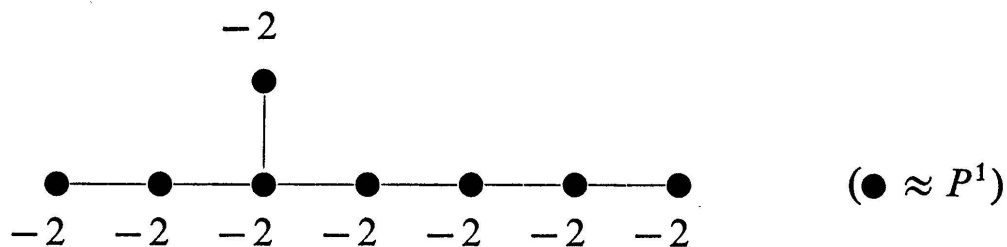
et une équation

$$60 \langle \sigma_0 | \sigma_0 \rangle + 48 + 42 + 30 = 0$$

On aurait enfin pu partir d'un polynôme  $\varphi''$  nul sur  $\mathcal{C}$ , d'où des diviseurs associés à  $\eta^{12}$  sur  $M_{10,8}$ ,  $\eta^{20}$  sur  $M_{6,4}$  et  $\xi\eta^{30}$  sur  $M_{4,2}$  et une équation

$$60 \langle \sigma_0 | \sigma_0 \rangle + 48 + 40 + 32 = 0.$$

COROLLAIRE. Le schéma de Dynkin associé à la résolution  $\pi_G \rho_i: M_{ico} \rightarrow X_{ico}$  est



et la matrice d'intersection associée est la matrice de Cartan  $E_8$ .

## V. 2. LE CAS DES AUTRES POLYÈDRES RÉGULIERS •

Nous noterons dans cette section  $\underline{G}_{ico}$  [respectivement  $\underline{G}_{oct}$ ,  $\underline{G}_{tét}$ ,  $\underline{D}_n$ ] le sous-groupe de  $SO(3)$  des rotations qui laissent invariant un icosaèdre régulier [resp. octaèdre régulier, tétraèdre régulier, polygone plan régulier à  $n \geq 3$  sommets] inscrit dans  $S^2$  et  $G_{ico}$  [resp.  $G_{oct}$ ,  $G_{tét}$ ,  $D_n$ ] son image

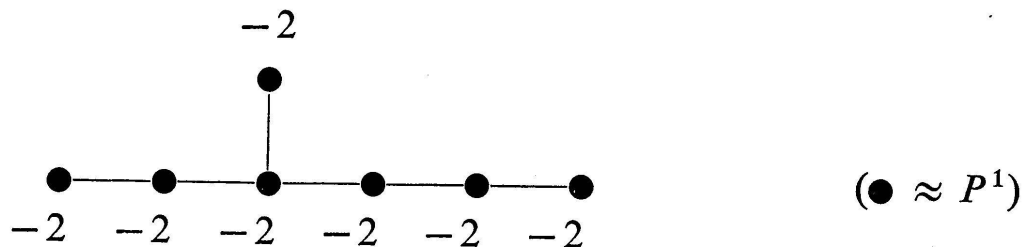
inverse par  $\delta^{-1}$  dans  $SU(2)$ . La section précédente est l'étude de l'espace  $X_{ico} = \mathbb{C}^2/G_{ico}$ , qui a un unique point singulier et qu'on a dit être isomorphe à la surface

$$A_{ico} = \{ (x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid z^5 = x^2 + y^3 \}.$$

Soit  $X_{oct}$  le quotient de  $\mathbb{C}^2$  par  $G_{oct}$ . Il est isomorphe à la surface

$$A_{oct} = \{ (x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid z^2 = x(x^2 - y^3) \}.$$

On peut en construire, comme pour le cas précédent, une désingularisation  $M_{oct} \rightarrow X_{oct}$ . Les calculs du chapitre IV relatifs à  $X_{8,6}$ ,  $X_{6,4}$  et  $X_{4,2}$  et un calcul analogue à celui de la proposition 18 montrent que le diagramme de Dynkin associé est



et que la matrice d'intersection est la matrice de Cartan  $E_7$ .

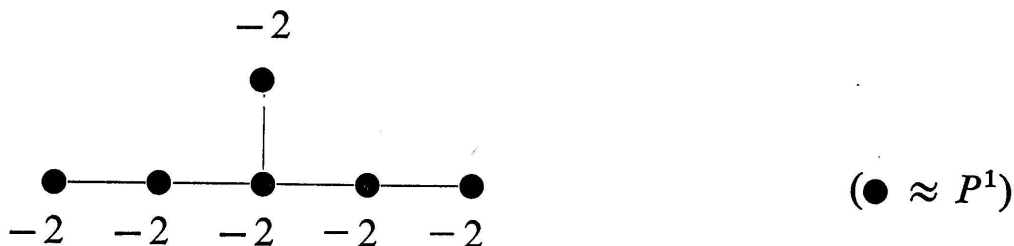
Contrairement à  $G_{ico}$ , le groupe  $G_{oct}$  n'est pas parfait. Son groupe dérivé est  $G_{tét}$  et son abélianisé  $\mathbb{Z}_2$ . Le quotient  $X_{tét}$  de  $\mathbb{C}^2$  par  $G_{tét} = (G_{oct}, G_{oct})$  est isomorphe à la surface

$$A_{tét} = \{ (x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid z^4 = x^2 + y^3 \}.$$

(Pour l'isomorphisme, voir [12], chap. II, § 12 et [15], § 4.) On trouve aussi

$$A_{tét} = \{ (x', y', z') \in \mathbb{C}^3 \mid y'^3 = x'(x' - z'^2) \},$$

ce qui correspond au changement de coordonnées  $x = x' - z'^2/2$ ,  $y = -y'$ ,  $z = z'/2$ . On obtient cette fois  $M_{tét} \rightarrow X_{tét}$ , où  $M_{tét}$  se fabrique en recollant deux copies de  $M_{6,4}$  et une copie de  $M_{4,2}$ . Le diagramme de Dynkin associé est



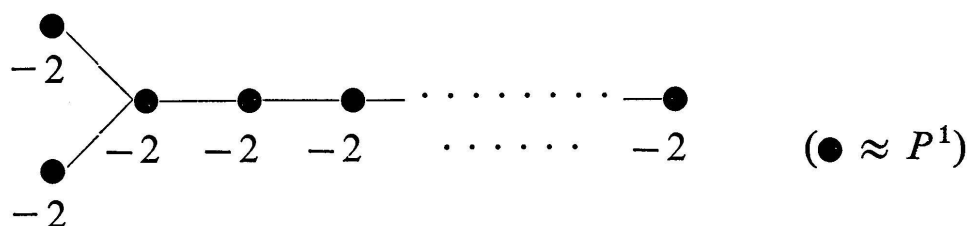
et la matrice d'intersection est la matrice de Cartan  $E_6$ .

L'analogie du théorème A de la section IV.3 s'énonce donc comme suit.

THÉOREME E. Les désingularisations des ensembles analytiques à singularité unique  $C^2/G$ , où  $G$  est l'un des trois groupes polyédraux binaires  $G_{ico}$ ,  $G_{oct}$ ,  $G_{tét}$ , définissent les schémas de Dynkin  $E_8$ ,  $E_7$  et  $E_6$ .

Le dernier théorème résume la situation qu'on obtiendrait en étudiant le cas des groupes diédraux binaires (voir [1]).

THÉOREME D. Soient  $n \geq 3$  et  $X_n$  l'ensemble analytique quotient de  $C^2$  par le groupe diédral binaire  $D_n$  (à  $4n$  éléments). On obtient une désingularisation  $M_n \rightarrow X_n$ , où  $M_n$  se fabrique en recollant deux copies de  $M_{4,2}$  et une copie de  $X_{2n,2}$ . Le schéma de Dynkin associé est



et la matrice d'intersection est la matrice de Cartan  $D_n$ .

On trouvera des renseignements complémentaires dans bien d'autres articles parmi lesquels nous citerons [10] et [20].

## RÉFÉRENCES

- [1] BEHNKE, K. und O. RIEMENSCHNEIDER. Diedersingularitäten. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* 47 (1978), pp. 210-227 et Infinitesimale Deformationen von Diedersingularitäten. *Manuscripta* 20 (1977), pp. 377-400.
- [2] BOCHNER, S. and W. T. MARTIN. *Several complex variables*. Princeton University Press 1948.
- [3] CARTAN, H. Quotient d'un espace analytique par un groupe d'automorphismes. *Algebraic geometry and algebraic topology, a symposium in honor of S. Lefschetz*, pp. 90-102, Princeton University Press 1957.
- [4] DURFEE, A. H. Fifteen characterizations of rational double points and simple critical points. *L'Enseignement math.* 25 (1979), pp. 131-163.
- [5] FISCHER, G. *Complex analytic geometry*. Springer Lecture Notes 538 (1976).
- [6] GODEMENT, R. *Cours d'algèbre*. Hermann 1963.
- [7] GUENOT, J. et R. NARASIMHAN. *Introduction à la théorie des surfaces de Riemann*. *L'Enseignement math.* 21 (1975), pp. 123-328.
- [8] GUNNING, R. C. and H. ROSSI. *Analytic functions of several complex variables*. Prentice Hall 1965.
- [9] HIRZEBRUCH, F. Über vierdimensionale Riemannsche Flächen mehrdeutiger analytischer Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen. *Math. Ann.* 126 (1953), pp. 1-22.