

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 25 (1979)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SINGULARITÉS DE KLEIN  
**Autor:** de la Harpe, P. / Siegfried, P.  
**Kapitel:** III.3. Classification  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-50380>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 23.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Si  $q = n - 1$ , nous avons vu que  $\phi$  est un isomorphisme de  $X_{n,n-1}$  sur  $A_{n,n-1}$ ; en d'autres termes que la *dimension de plongement* de la singularité normale  $X_{n,n-1}$  est 3. On sait calculer en général la dimension de plongement de  $X_{n,q}$ : si  $(n, q) = 1$  et avec les notations de la section IV.2, elle vaut  $3 + \sum_{k=1}^s (b_k - 2)$ . En particulier, la réciproque à l'assertion ci-dessus est aussi vraie: si  $(n, q) = 1$  et si  $X_{n,q}$  se plonge dans  $\mathbf{C}^3$ , alors  $q = n - 1$ . Voir [22], fin du § 3.

### III.3. CLASSIFICATION

Soit  $\underline{\Gamma}$  un germe de surface plongé dans  $\mathbf{C}^3$ . Reprenons les notations de la section II.2; supposons que le lieu discriminant exhibe une singularité consistant en un point double avec croisement normal — en d'autres termes, supposons qu'on puisse choisir les coordonnées de telle sorte que  $\gamma_D = \{(x, y) \in D_2 \mid xy = 0\}$ . Nous noterons  $D_2^{**}$  l'espace  $D_2 - \gamma_D$  et  $\Gamma_D^{**}$  son image inverse par  $\pi$ ; la projection se restreint en un revêtement à  $n$  feuilles  $\pi^{**}: \Gamma_D^{**} \rightarrow D_2^{**}$ . On identifie comme à la section précédente le groupe fondamental de  $D_2^{**}$  à  $\mathbf{Z}^2$ .

**PROPOSITION 14.** Il existe un polycylindre  $E_2$  dans  $\mathbf{C}^2$ , un morphisme  $\rho^{**}: \Gamma_D^{**} \rightarrow E_2^{**}$  et des entiers  $n, q$  avec  $0 \leq q < n$  et  $(n, q) = 1$  tels que  $\rho^{**}$  induise une injection de  $\text{Fond}(\Gamma_D^{**})$  sur le sous-groupe de  $\text{Fond}(E_2^{**}) = \mathbf{Z}^2$  engendré par  $(n, 0)$  et  $(q, 1)$ .

*Preuve.* Soit  $G$  l'image de  $\text{Fond}(\Gamma_D^{**})$  dans  $\mathbf{Z}^2$  définie par  $\pi^{**}$ . C'est un sous-groupe d'indice fini de  $\mathbf{Z}^2$  car  $\pi^{**}$  est un revêtement fini. Par suite  $G$  contient des éléments de la forme  $(k, 0)$ ; soit

$$a = \inf \{ |k| \mid (k, 0) \in G \quad \text{et} \quad k \neq 0 \}.$$

On peut choisir un vecteur  $(b, c)$  formant avec  $(a, 0)$  une base de  $G$ , tel que  $0 \leq b < a$  et  $c > 0$ .

Soit  $d$  le plus grand commun diviseur de  $a$  et  $b$  (avec  $d = a$  si  $b$  est nul). Soient  $E_2 = \{(u, v) \in \mathbf{C}^2 \mid (u^d, v^c) \in D_2\}$  et  $E_2^{**} = \{(u, v) \in E_2 \mid uv \neq 0\}$ .

L'application  $\kappa^{**}: (u, v) \mapsto (u^d, v^c)$  de  $E_2^{**}$  sur  $D_2^{**}$  est un revêtement holomorphe connexe à  $dc$  feuilles, et induit une injection de  $\text{Fond}(E_2^{**})$  sur le sous-groupe de  $\mathbf{Z}^2 = \text{Fond}(D_2^{**})$  engendré par  $(d, 0)$  et  $(0, c)$ . Ce groupe contenant  $G$ , il existe un morphisme  $\rho^{**}$  rendant le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & E_2^{**} & \\ \rho^{**} \nearrow & & \downarrow \kappa^{**} \\ \pi^{**} \searrow & & \\ \Gamma_D^{**} & \xrightarrow{\quad} & D_2^{**} \end{array}$$

commutatif. Au niveau des groupes fondamentaux,  $\rho^{**}$  induit un isomorphisme de  $\text{Fond}(\Gamma_D^{**})$  sur le sous-groupe de  $\mathbf{Z}^2 = \text{Fond}(E_2^{**})$  engendré par  $(a/d, 0/c)$  et  $(b/d, c/c)$ . ■

**PROPOSITION 15.** Avec les notations de la proposition 14, le germe  $\tilde{\Gamma}$  normalisé de  $\Gamma$  est isomorphe au germe de  $X_{n,q}$  au point singulier.

*Preuve.* Soient  $\rho^{**}: \Gamma_D^{**} \rightarrow E_2^{**}$  comme dans la preuve précédente et  $\pi^{**}: A_{n,q}^{**} \rightarrow \mathbf{C}^{**}$  comme dans la section précédente. Soient  $V = \{ (x, y, z) \in \mathbf{C}^3 \mid (x, y) \in E_2 \}$  et  $\pi_V^{**}$  la restriction de  $\pi^{**}$  à  $A_{n,q}^{**} \cap V$ . Les revêtements  $\rho^{**}$  et  $\pi_V^{**}$  définissent le même sous-groupe de  $\text{Fond}(E_2^{**})$ . Il existe donc des morphismes  $g$  et  $h$ , inverses l'un de l'autre, rendant le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A_{n,q}^{**} \cap V & \xrightleftharpoons[g]{h} & \Gamma_D^{**} \\ \pi_V^{**} \searrow & & \swarrow \rho^{**} \\ & E_2^{**} & \end{array}$$

commutatif. Le morphisme  $g$  est borné car  $\pi$  l'est et  $\rho^{**}$  est propre; de même,  $h$  est borné. Le raisonnement usuel (voir par exemple celui qui précède la proposition 13) montre que  $g$  et  $h$  permettent de définir un isomorphisme du normalisé de  $A_{n,q} \cap V$  avec  $\tilde{\Gamma}_D$ , c'est-à-dire du germe de  $X_{n,q}$  au point singulier avec  $\tilde{\Gamma}$ . ■