Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 25 (1979)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SINGULARITÉS DE KLEIN
Autor: de la Harpe, P. / Siegfried, P.
Kapitel: III.1. Les surfaces $A_{n,q}$ et leurs normalisations
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-50380

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Si $f\colon X \to Y$ est la section nulle du fibré π, (de sorte que le A de la proposition 8 est vide), il est alors évident que f ne se relève pas, car cela impliquerait que le revêtement $E \to Y_{\text{sing}} = f(X)$ soit trivial.

$$\begin{tikzcd} & \tilde{Y} \arrow[d, "\nu_X"] \\ X \arrow[r, shift left, "f"] & Y \arrow[l, shift left, "\pi"] \end{tikzcd}$$

III. SINGULARITÉS NORMALES AVEC DISCRIMINANTS A CROISEMENTS NORMAUX

III.1. Les surfaces $A_{n,q}$ et leurs normalisations

Soient n et q des entiers, avec n positif et $q \leqslant n$. Nous noterons $A_{n,q}$ la *surface* $\{(x, y, z) \in \mathbf{C}^3 \mid z^n = xy^{n-q}\}$.

Si $n = 1$, les surfaces ainsi définies sont toutes lisses: l'isomorphisme $(x, y, z) \mapsto (x, y, z - xy^{1-q})$ de $\mathbf{C}^3$ applique $A_{1,n}$ sur l'hyperplan d'équation $z = 0$. De même, si $q = n$, l'isomorphisme $(x, y, z) \mapsto (x - z^n, y, z)$ applique $A_{n,n}$ sur l'hyperplan d'équation $x = 0$. Nous supposerons désormais $n \geqslant 2$ et $q < n$ sauf mention expresse du contraire.

Si $q = n - 1$, les dérivées partielles du polynôme $z^n - xy^{n-q} = z^n - xy$ ne s'annulent simultanément qu'à l'origine, et $A_{n,n-1}$ est lisse en dehors de ce point (donc normale en vertu d'un théorème d'Oka rappelé en II.2). Si $q \leqslant n - 2$, la surface $A_{n,q}$ est lisse en dehors de la droite d'équations $y = z = 0$; nous vérifions ci-dessous que ces points sont effectivement tous singuliers; la proposition 7 montre donc que $A_{n,q}$ n'est pas normale.

Soit $G_{n,q}$ le groupe des isomorphismes de C^2 de la forme $(s, t) \mapsto (\zeta^q s, \zeta t)$ où ζ est une racine n-ième de l'unité; c'est un *groupe cyclique* d'ordre n. Nous noterons $X_{n,q}$ l'*ensemble des orbites*, muni de sa structure canonique d'ensemble analytique normal.

Si $q = 0$, l'ensemble $X_{n,0}$ est lisse: l'application $(s, t) \mapsto (s, t^n)$ passe au quotient et définit un isomorphisme de $X_{n,0}$ sur $\mathbf{C} \times (\mathbf{C}/(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})) \approx \mathbf{C}^2$. Les espaces $X_{n,q}$ et $X_{n,q'}$ sont évidemment identiques si $q' \equiv q$ (modulo n); il suffit donc d'étudier les $X_{n,q}$ pour lesquels $1 \leqslant q < n$ (voir de plus la proposition 13).

Considérons le morphisme $\tilde{\phi}_{n,q}: \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^3$ défini par $\tilde{\phi}_{n,q}(s, t) = (s^n, t^n, st^{n-q})$; son image est dans $A_{n,q}$ et il définit par passage au quotient un morphisme $\phi_{n,q}: X_{n,q} \to A_{n,q}$. Nous écrirons aussi $\tilde{\phi}$ et ϕ au lieu de $\tilde{\phi}_{n,q}$ et $\phi_{n,q}$.

PROPOSITION 9. Le morphisme ϕ induit un *homéomorphisme* de l'image de $\{(s, t) \in \mathbf{C}^2 \mid t \neq 0\}$ dans $X_{n,q}$ sur $\{(x, y, z) \in A_{n,q} \mid y \neq 0\}$. Si n et q sont premiers entre eux, ϕ lui-même est un homéomorphisme de $X_{n,q}$ sur $A_{n,q}$.

Preuve. Montrons d'abord que $\tilde{\phi}$ est surjectif et que l'image inverse par $\tilde{\phi}$ de tout point autre que l'origine est formée de n points.

Soit $P = (x, y, z) \in A_{n,q}$ avec $y \neq 0$. Choisissons une racine n-ième t de y et posons $s = zt^{-n+q}$. Alors

$$\tilde{\phi}(s, t) = (z^n y^{-n+q}, y, z) = (x, y, z).$$

Soit $(s', t') \in \mathbf{C}^2$ avec $\tilde{\phi}(s', t') = \tilde{\phi}(s, t)$. Il existe des racines n-ièmes ζ et η de l'unité avec $s' = \zeta s$, $t' = \eta t$ et $\zeta\eta^{n-q} = 1$. Par suite $\tilde{\phi}^{-1}(P)$ a n points.

Soit $Q = (x, 0, 0) \in A_{n,q}$ avec $x \neq 0$. Choisissons une racine n-ième s de x. Alors $\tilde{\phi}^{-1}(Q) = \{(\zeta s, 0) \in \mathbf{C}^2 \mid \zeta \in \mathbf{C} \text{ et } \zeta^n = 1\}$ a n points.

Le groupe $G_{n,q}$ agit librement sur $\{(s, t) \in \mathbf{C}^2 \mid t \neq 0\}$, et même sur $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ lorsque n et q sont premiers entre eux. Il en résulte que la restriction de ϕ à l'image de $\{(s, t) \in \mathbf{C}^2 \mid t \neq 0\}$ dans $X_{n,q}$ est injective dans tous les cas, et que ϕ lui-même est une bijection si $(n, q) = 1$.

Montrons par exemple que ϕ est un homéomorphisme si $(n, q) = 1$. Pour tout nombre réel positif r, soient K_r l'image dans $X_{n,q}$ de

$$\{(s,t) \in \mathbf{C}^2 \mid |s| \leqslant r \text{ et } |t| \leqslant r\}$$

et L_r l'intersection avec $A_{n,q}$ de

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{C}^3 \mid |x| \leqslant r^n, |y| \leqslant r^n, |z| \leqslant r^{1+n-q}\}.$$

La restriction de ϕ à K_r est une bijection continue du compact K_r sur le compact L_r; c'est donc un homéomorphisme. Par suite, ϕ est un homéomorphisme. ∎

COROLLAIRE. Si $(n, q) = 1$, la surface $A_{n,q}$ est topologiquement *singulière à l'origine.*

Preuve. Pour tout $r > 0$, le complémentaire de l'origine dans L_r est homéomorphe au complémentaire du point central dans K_r. Il se rétracte donc par déformation sur l'espace lenticulaire que définit l'action de $G_{n,q}$ sur une petite sphère $\mathbf{S}^3$ centrée à l'origine de $\mathbf{C}^2$. (L'intérieur de L_1 est donc un bon voisinage de l'origine dans $A_{n,q}$ au sens de la section II.1.) En particulier, le groupe fondamental du complémentaire de l'origine dans L_r n'est pas trivial. ■

Remarquons que c'est aussi un corollaire immédiat de la proposition 9 que $(A_{n,q})_{\text{rég}}$ est « connexe à l'origine »: $(L_r)_{r\in\mathbf{R}_+^*}$ est une base de voisinages de l'origine dans $A_{n,q}$ et $L_r \cap (A_{n,q})_{\text{rég}}$ est connexe pour tout $r \in \mathbf{R}_+^*$. D'autre part, il est facile de vérifier que le polynôme $z^n - xy^{n-q}$ est irréductible dans ${}_2\mathcal{O}[z]$, donc aussi dans ${}_3\mathcal{O}$ (voir [8], lemme II.B.5). On vérifie ainsi un cas particulier d'une affirmation énoncée à la section II.1.

PROPOSITION 10. Supposons $q \leqslant n - 2$. Soient $c \in \mathbf{C}^*$ et $Q = (c, 0, 0) \in A_{n,q}$. Alors le voisinage $\{(x, y, z) \in A_{n,q} \mid |x - c| < |c|\}$ de Q dans $A_{n,q}$ est isomorphe au produit direct du disque $D = \{\xi \in \mathbf{C} \mid |\xi| < 1\}$ et de la courbe plane $\gamma = \{(y, z) \in \mathbf{C}^2 \mid z^n = y^{n-q}\}$.

Preuve. Soit $\rho: D \to \mathbf{C}$ la fonction holomorphe définie par $\rho(\xi)^n = 1 + \xi$ pour tout $\xi \in D$ et $\rho(0) = 1$. Soit d une racine $(n-q)$-ième de $1/c$. Considérons l'application $\alpha: D \times \gamma \to \mathbf{C}^3$ définie par $\alpha(\xi, y, z) = (c(1+\xi), dy, \rho(\xi) z)$. Pour tout $(\xi, y, z) \in D \times \gamma$, on a

$$(\rho(\xi) z)^n - c(1+\xi)(dy)^{n-q} = (1+\xi)(z^n - y^{n-q}) = 0 .$$

Par suite α définit un morphisme

$$D \times \gamma \to \{(x, y, z) \in A_{n,q} \mid |x - c| < |c|\} .$$

qui applique $(0, 0, 0)$ sur Q et d'inverse donné par

$$(x, y, z) \mapsto (c^{-1}x - 1, d^{-1}y, (\rho(c^{-1}x - 1))^{-1} z) . \blacksquare$$

COROLLAIRE. Supposons $q \leqslant n - 2$. Si $(n, q) \neq 1$, la surface $A_{n,q}$ est topologiquement *singulière en tout point de l'axe* d'équations $y = z = 0$. Si $(n, q) = 1$, c'est une variété topologique au voisinage de Q qui n'est pas normale en Q.

Preuve. Si $(n, q) \neq 1$, la courbe γ a plusieurs branches à l'origine; les intersections de petites sphères centrées à l'origine dans $\mathbf{C}^2$ avec

$\gamma - \{0\}$ ne sont donc pas connexes et $A_{n,q}$ est bien topologiquement singulière en Q. Si $(n, q) = 1$, la surface est une variété topologique au voisinage de Q en vertu du corollaire à la proposition 3. Reste à montrer que $D \times \gamma$ n'est pas normal. Cela résulte de la proposition 7, ou de l'argument direct qui suit.

Soient $a, b \in \mathbf{Z}$ avec $an + b(n-q) = 1$, et $\psi: D \times \gamma \to \mathbf{C}$ la fonction définie par $\psi(\xi, y, z) = \begin{cases} y^a z^b & \text{si} \quad yz \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad y = z = 0 \end{cases}$. Alors ψ n'est pas holomorphe, mais ψ^n l'est car $\psi(\xi, y, z)^n = y$. L'anneau des germes en Q de fonctions holomorphes n'est donc pas intégralement clos. ■

PROPOSITION 11. Pour tout couple (n, q) avec $n \geqslant 2$ et $q \leqslant n - 1$, le morphisme $\phi_{n,q}: X_{n,q} \to A_{n,q}$ est la normalisation de $A_{n,q}$. C'est un isomorphisme si et seulement si $q = n - 1$.

Preuve. Cela résulte de ce qui précède et du théorème de Cartan rappelé à la section II.1. ■

On pourrait montrer que les surfaces $A_{n,q}$, $A_{n,q-n}$, $A_{n,q-2n}$, ... sont non isomorphes deux à deux; par suite, $X_{n,q}$ est la normalisation d'une infinité d'ensembles analytiques distincts.

III.2. LES DISCRIMINANTS DES $A_{n,q}$ ET LES OUVERTS $A_{n,q}^{**}$

Soient à nouveau n et q des entiers avec $n \geqslant 2$ et $q < n$. Notons $F \in {}_2\mathcal{O}[z]$ le polynôme $z^n - xy^{n-q}$. A un facteur numérique près, son discriminant est une puissance de xy^{n-q}. Soient en effet $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses racines, qui sont dans une extension convenable du corps des quotients de ${}_2\mathcal{O}$; alors

$$\operatorname{Dis}(F) = \prod \frac{\partial F}{\partial z}(\lambda_j) = \prod n\lambda_j^{n-1} = (\prod n\lambda_j^n)(\prod \lambda_j)^{-1}$$

$$= n^n (xy^{n-q})^n (-1)^n F(x, y, 0)^{-1} = (-1)^{n-1} n^n (xy^{n-q})^{n-1}$$

(tous les produits étant sur j de 1 à n). Comme à la section II.2, désignons par $\pi: A_{n,q} \to \mathbf{C}^2$ la restriction à $A_{n,q}$ de la projection canonique $(x, y, z) \mapsto (x, y)$. Nous noterons $\mathbf{C}^{**}$ l'espace $\mathbf{C}^2$ privé du lieu discriminant $\gamma = \{(x, y) \in \mathbf{C}^2 \mid xy = 0\}$ et $A_{n,q}^{**}$ l'image inverse par π de $\mathbf{C}^{**}$. La proposition 7 ou un examen direct montre que π se restreint en un revêtement holomorphe à n feuilles

$$\pi^{**}: A_{n,q}^{**} \to \mathbf{C}^{**}.$$