Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 25 (1979)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SINGULARITÉS DE KLEIN

Autor: de la Harpe, P. / Siegfried, P.

Kapitel: I.2. Les tangentes en un point d'une courbe plane

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-50380

sition 2) à n feuilles de l'espace D_1^* à groupe fondamental abélien. Il existe donc un isomorphisme analytique Φ^* rendant le diagramme

$$\begin{tikzcd} D(r)^* \arrow[rr, "\Phi^*"] \arrow[dr] & & \gamma_D^* \arrow[dl, "\pi^*"] \\ & D_1^* & \end{tikzcd}$$

commutatif. Comme Φ^* est borné, il se prolonge par continuité en un morphisme bijectif $\Phi : D(r) \to \gamma_D$ de la forme $t \mapsto (t^n, \varphi(t))$ avec $\varphi \in \mathcal{O}(D(r))$. C'est alors un exercice facile de topologie générale de montrer que Φ est un homéomorphisme. ■

Corollaire. Les courbes planes irréductibles sont des *variétés topologiques.*

Notons qu'une courbe plane (plus généralement une sous-variété de $\mathbf{C}^k$) analytiquement singulière n'est jamais une variété différentiable; voir par exemple [14], §2.

La proposition 3 exprime γ_D paramétriquement par $x = t^n$ et

$$y = \varphi(t) = a_0 t^m + a_1 t^{m+1} + \dots + a_k t^{m+k} + \dots (a_0 \neq 0);$$

on montre facilement qu'on ne restreint pas la généralité en supposant $m \geqslant n$. On écrit aussi

$$y = a_0 x^{m/n} + a_1 x^{(m+1)/n} + \dots + a_k x^{(m+k)/n} + \dots$$

et on parle alors du *développement de Puiseux* ou de la *série fractionnaire* associé au germe considéré.

I.2. Les tangentes en un point d'une courbe plane

Soient k un entier positif et $\mathrm{Ev}: {}_k\mathcal{O} \to \mathbf{C}$ l'évaluation à l'origine, qui n'est autre que la projection canonique de l'anneau local ${}_k\mathcal{O}$ sur son corps résiduel.

Proposition 4. L'anneau local ${}_k\mathcal{O}$ est *hensélien.* En d'autres termes, soient $P \in {}_k\mathcal{O}[t]$ un polynôme unitaire et $\rho, \sigma \in \mathbf{C}[t]$ des polynômes unitaires étrangers tels que $\mathrm{Ev}(P) = \rho\sigma$. Alors il existe des polynômes unitaires R et S dans ${}_k\mathcal{O}[t]$ avec $P = RS$, $\mathrm{Ev}(R) = \rho$ et $\mathrm{Ev}(S) = \sigma$.

Attention : P n'est pas nécessairement un polynôme de Weierstrass.

Preuve. Notons $\operatorname{Ev}(P)(t) = P(0, t) = \prod (t-\lambda_j)^{s_j}$, avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ distincts. (Dans cette preuve, les produits $\prod$ portent sur l'indice j de 1 à n et les $\prod'$ portent sur j de 2 à n). Nous voulons montrer par induction sur n qu'il existe des polynômes unitaires $P_1, \ldots, P_n$ dans ${}_k\mathcal{O}[t]$ avec $P = \prod P_j$ et $\operatorname{Ev}(P_j)(t) = (t-\lambda_j)^{s_j}$. Cette assertion étant trivialement vraie pour $n = 1$, on peut supposer $n \geqslant 2$ et qu'elle est vraie pour tous les polynômes dont l'évaluation a au plus $n - 1$ racines distinctes.

Supposons d'abord que $P(0, 0) = 0$ et que $\operatorname{Ev}(P) = t^{s_1} \prod' (t-\lambda_j)^{s_j}$. Le théorème de préparation permet d'écrire

$$P(x; t) = u(x, t)\,[t^{s_1} + a_1(x)\,t^{s_1-1} + \ldots + a_{s_1}(x)]$$

où u est un polynôme de ${}_k\mathcal{O}[t]$ inversible dans ${}_{k+1}\mathcal{O}$ et où les a_j sont des germes dans ${}_k\mathcal{O}$ qui sont nuls à l'origine. Par suite

$$Ev(P)(t) = u(0, t)\,t^{s_1} = t^{s_1} \prod{}' (t-\lambda_j)^{s_j}$$

et $u(0, t) = \prod' (t-\lambda_j)^{s_j}$. Par hypothèse d'induction, il existe $P_2, \ldots, P_n$ dans ${}_k\mathcal{O}[t]$ avec $u = \prod' P_j$ et $P_j(0, t) = (t-\lambda_j)^{s_j}$ pour $j = 2, \ldots, n$. On achève en posant

$$P_1(x, t) = t^{s_1} + a_1(x)\,t^{s_1-1} + \ldots + a_{s_1}(x)\,.$$

Supposons au contraire que $P(0, 0) \neq 0$. Soient $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $P(0, \lambda) = 0$ et P^T le polynôme défini par $P^T(x, t) = P(x, t+\lambda)$. Alors P^T est un produit de n facteurs P_j^T par l'argument précédent et on achève en posant $P_j(x, t) = P_j^T(x, t-\lambda)$ pour $j = 1, \ldots, n$. ■

Notons qu'il existe d'autres définitions (équivalentes à celle de la proposition) pour un anneau local d'être hensélien; voir par exemple [AC, III, §4, ex. 3].

Soient $\underline{\gamma}$, D_2, f et γ_D comme au début de la section 1. Ecrivons la série de Taylor de f à l'origine sous la forme $f(x, y) = \sum h_j(x, y)$ (somme sur j de p à l'infini), où h_j est un polynôme homogène de degré j en x et y et où $h_p \neq 0$. Le polynôme h_p est un produit de facteurs linéaires. Quitte à modifier les axes de coordonnées, on peut supposer que h_p ne s'annule pas sur la droite d'équation $x = 0$, donc que $h_p(x, y) = c \prod (y-\lambda_j x)^{s_j}$ avec c un nombre complexe, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ des nombres complexes distincts, et $s_1, \ldots, s_m$ des entiers positifs de somme p. Les droites d'équation $y = \lambda_j x$ sont par définition les *tangentes* de $\underline{\gamma}$. Pour chaque entier $j \geqslant p$, on a $h_j(0, y)$ proportionnel à y^j, et $h_p(0, y) = cy^p$ avec $c \neq 0$. Par suite, f est une fonction régulière d'ordre p en y; avec les notations du début de la section 1, on a donc $p = n$. Cet entier s'appelle la *multiplicité* de f à l'origine; il ne dépend pas des coordonnées choisies sur $\mathbf{C}^2$.

PROPOSITION 5. Si $\underline{\gamma}$ a plusieurs tangentes, alors $\underline{f}$ est réductible.

Preuve. Comme

$$f(x, y) = y^n + a_1(x) y^{n-1} + \ldots + a_n(x) = \sum_{j=n}^{\infty} h_j(x, y)$$

l'ordre du zéro de a_i à l'origine est au moins i ($i=1, \ldots, n$). Nous écrirons

$$f(x, y) - h_n(x, y) = b_1(x) y^{n-1} + b_2(x) y^{n-2} + \ldots + b_n(x)$$

et $b_i(x) = x^{i+1} c_i(x)$, où c_i représente un germe holomorphe à l'origine ($i=1, \ldots, n$).

Si u et v décrivent de petits voisinages de l'origine dans $\mathbf{C}$, la fonction $(u, v) \mapsto f(v, uv)$ est divisible par v^n. Définissons $\underline{\tilde{f}} \in {}_2\mathcal{O}$ par $\tilde{f}(u, v) = v^{-n} f(v, uv)$; on a donc

$$\tilde{f}(u, v) = h_n(1, u) + vc_1(v) u^{n-1} + vc_2(v) u^{n-2} + \ldots + vc_n(v) .$$

L'évaluation Ev: ${}_1\mathcal{O} \to \mathbf{C}$ associe au polynôme $\tilde{f} \in {}_1\mathcal{O}[u]$ le polynôme $u \mapsto h_n(1, u)$ de $\mathbf{C}[u]$.

Si $\underline{\gamma}$ a plusieurs tangentes, il résulte de la proposition 4 que $\tilde{f}$ est un produit dans ${}_1\mathcal{O}[u]$ de polynômes unitaires $\tilde{g}$ et $\tilde{h}$ de degrés respectifs $r < n$ et $s < n$. Définissons alors g et h dans ${}_1\mathcal{O}[y]$ par $g(x, y) = x^r \tilde{g}(y/x, x)$ et $h(x, y) = x^s \tilde{h}(y/x, x)$. Alors $f = gh$ et $\underline{f}$ est réductible. ■

La signification géométrique de $\tilde{f}$ dans la preuve ci-dessus sera éclairée au numéro suivant.

Par exemple, le polynôme réductible xy définit une courbe ayant deux tangentes à l'origine. La réciproque à la proposition 5 n'est pas vraie car le polynôme réductible $x(x^2 - y^3)$ définit une courbe n'ayant qu'une tangente à l'origine.

I.3. ECLATEMENT ET IRRÉDUCTIBILITÉ

Pour tout entier positif k, nous noterons h la projection canonique de $\mathbf{C}^{k+1} - \{0\}$ sur l'espace projectif P^k; nous écrirons $(\omega_0, \ldots, \omega_k)$ les coordonnées d'un vecteur de $\mathbf{C}^{k+1}$ et $[z_0, \ldots, z_k]$ les coordonnées homogènes d'un point de P^k. Introduisons la variété