

# I.1. Singularités des courbes planes et revêtements

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1979)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

tant qu'éléments de  $K[X]$  [AC, VII, §3, n° 5, th. 2], ou encore si et seulement si leurs facteurs irréductibles (= éléments extrémaux) sont non équivalents deux à deux [A, VI, §1, n° 12, prop. 11 (DIV) et AC, VII, §3, n° 2, th. 1], ou enfin si et seulement si leur *résultant n'est pas nul* dans  $A$  (donc est inversible dans  $K$ ); cette dernière affirmation est à un oubli de détail près le lemme 3 de l'appendice III de [7]. De même, les facteurs irréductibles de  $P$  sont non équivalents entre eux si et seulement si son discriminant n'est pas nul; on dit alors que  $P$  est *sans facteur multiple*.

Soient  $B$  un second anneau intègre et  $\varphi: A \rightarrow B$  un homomorphisme appliquant 1 sur 1; nous désignons par la même lettre l'homomorphisme  $A[X] \rightarrow B[X]$ . Si  $\text{Res}(\cdot, \cdot)$  et  $\text{Dis}(\cdot)$  dénotent respectivement le résultant et le discriminant, il convient d'insister sur la propriété suivante, qui est très utile malgré sa banalité:

$$\begin{aligned} \varphi(\text{Res}(P, Q)) &= \text{Res}(\varphi(P), \varphi(Q)) \\ \varphi(\text{Dis}(P)) &= \text{Dis}(\varphi(P)). \end{aligned}$$

Le cas le plus fréquent ci-dessous est celui où  $A = \mathcal{O}(D)$  est l'anneau des fonctions holomorphes sur un polycylindre  $D$  de  $\mathbb{C}^k$  centré à l'origine, où  $B = {}_k\mathcal{O}$  et où  $\varphi: f \mapsto \underline{f}$  est l'injection canonique. Précisons à ce sujet que tous les *polycylindres* du texte sont *ouverts*.

Le travail du premier auteur a été rendu possible par le Fonds national suisse de la recherche scientifique.

## I. COURBES PLANES

### I.1. SINGULARITÉS DES COURBES PLANES ET REVÊTEMENTS

Soit  $\underline{\gamma}$  un *germe de courbe plane*. On peut toujours supposer  $\underline{\gamma}$  donné par les zéros d'un polynôme de Weierstrass (quitte à opérer un changement linéaire de coordonnées). Plus précisément, il existe

- 1°) Un polycylindre  $D_2$  dans  $\mathbb{C}^2$ , centré à l'origine; nous noterons  $D_1$  sa trace sur la droite  $\mathbf{C} = \mathbf{C}_x$  de  $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C}_{xy}^2$ .
- 2°) Un polynôme de Weierstrass  $f \in \mathcal{O}(D_1)[y]$  de degré  $n$ , c'est-à-dire une fonction  $f \in \mathcal{O}(D_2)$  avec

$$f(x, y) = y^n + a_1(x) y^{n-1} + \dots + a_n(x)$$

pour tout  $(x, y) \in D_2$ , où les  $a_j$  sont des fonctions holomorphes dans  $D_1$  qui s'annulent à l'origine.

Le germe  $\underline{\gamma}$  est alors représenté par  $\gamma_D = \{(x, y) \in D_2 \mid f(x, y) = 0\}$ . Nous écrirons plus simplement  $\gamma$  si  $D_2 = \mathbf{C}^2$ . On peut toujours remplacer  $D_2$  par un polycylindre plus petit; en particulier, on pourra toujours supposer que la projection canonique fournit par restriction une application  $\pi$  de  $\gamma_D$  sur  $D_1$ . Si  $n = 1$ , le changement de coordonnées  $(x, y) \mapsto (x, y - a(x))$  montre que  $\gamma_D$  est lisse à l'origine; nous supposons désormais  $n \geq 2$  (on prendra garde que ceci n'exclut pas tous les germes lisses, comme le montre le cas de  $f(x, y) = y^2 - x$ ).

PROPOSITION 1. Soit  $\underline{\gamma}$  un germe donné comme ci-dessus. Alors la projection canonique de  $\mathbf{C}^2$  sur  $\mathbf{C}$  induit (après rétrécissement éventuel de  $D_2$ ) un revêtement holomorphe à  $n$  feuilles

$$\pi^*: \gamma_D^* = \gamma_D - \{(0, 0)\} \rightarrow D_1^* = D_1 - \{0\}$$

*Preuve.* Le discriminant  $\text{Dis}(f)$  est un élément de  $\mathcal{O}(D_1)$ . Notons  $\text{Ev}: \mathcal{O}(D_1) \rightarrow \mathbf{C}$  le morphisme d'évaluation  $g \mapsto g(0)$ ; alors  $\text{Ev}(\text{Dis}(f)) = \text{Dis}(\text{Ev}(f))$ . Or  $\text{Ev}(f) = y^n$  est un polynôme qui a par hypothèse ( $n \geq 2$ ) une racine multiple et son discriminant est nul. Par suite  $\text{Dis}(f)$  s'annule à l'origine.

On peut supposer que le germe à l'origine  $\underline{f}$  de  $f$  est sans facteur multiple, de sorte que  $\text{Dis}(\underline{f})$  n'est pas nul. Mais  $\text{Dis}(\underline{f})$  est le germe de  $\text{Dis}(f)$ . Par suite la fonction  $\text{Dis}(f)$  n'est pas nulle, ses zéros sont isolés, et on peut supposer (après rétrécissement de  $D_2$  au besoin) que  $\text{Dis}(f)$  ne s'annule pas dans  $D_1^*$ .

Soient  $a \in D_1^*$  et  $\text{Ev}_a: \mathcal{O}(D_1) \rightarrow \mathbf{C}$  l'évaluation  $g \mapsto g(a)$ . Comme  $\text{Dis}(\text{Ev}_a(f)) = \text{Ev}_a(\text{Dis}(f)) \neq 0$ , le polynôme  $y \mapsto f(a, y)$  n'a pas de racine double; en d'autres termes  $\frac{\partial f}{\partial y}(a, y) \neq 0$  si  $(a, y) \in \gamma_D^*$ . Par suite la

fonction  $\frac{\partial f}{\partial y} \in \mathcal{O}(D_2)$  ne s'annule pas sur  $\gamma_D^*$ . Le théorème des fonctions implicites affirme dans cette situation que  $\gamma_D^*$  est une courbe lisse et que  $\pi^*$  est un isomorphisme analytique local. Ses fibres ayant toutes le même nombre  $n$  d'éléments, c'est de plus un revêtement. ■

COROLLAIRE. Les singularités des courbes planes sont isolées.

PROPOSITION 2. On suppose  $\underline{f}$  sans facteur multiple. Alors  $\underline{f}$  est *réductible* si et seulement s'il existe un polycylindre  $D_2$  tel que  $\underline{f}$  ait un représentant  $f \in \mathcal{O}(D_2)$  avec  $\gamma_D^*$  non connexe.

*Preuve.* Supposons  $\underline{f} = \underline{f}' \underline{f}''$ , avec  $\underline{f}'$  et  $\underline{f}''$  des polynômes de Weierstrass non constants et sans facteur commun; leur résultant est donc un élément non nul de  ${}_1\mathcal{O}$ . On peut choisir un polycylindre  $D_2$  et des représentants  $f'_D$  et  $f''_D$  de  $\underline{f}'$  et  $\underline{f}''$  tels que le résultant de  $f'_D$  et  $f''_D$  soit une fonction de  $\mathcal{O}(D_1)$  sans zéro dans  $D_1^*$ . Un argument déjà utilisé dans la preuve de la proposition 1 montre alors que  $f'_D$  et  $f''_D$  n'ont pas de zéro commun dans  $D_2 - \{(0, 0)\}$ . Par suite les ensembles

$$\gamma' = \{ (x, y) \in D_2 \mid f'_D(x, y) = 0 \quad \text{et} \quad x \neq 0 \}$$

et

$$\gamma'' = \{ (x, y) \in D_2 \mid f''_D(x, y) = 0 \quad \text{et} \quad x \neq 0 \}$$

forment une partition en fermés non vides de  $\gamma_D^*$ , qui n'est donc pas connexe.

Supposons réciproquement qu'il existe un polycylindre  $D_2$  tel que l'espace total du revêtement associé  $\pi^*: \gamma_D^* \rightarrow D_1^*$  admette une partition en deux fermés non vides:  $\gamma_D^* = \gamma' \cup \gamma''$ . Par la proposition 1, le cardinal  $n'$  de  $\gamma' \cap \pi^{-1}(x)$  ne dépend pas du choix de  $x$  dans  $D_1^*$ . Soient  $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$  les zéros de la fonction  $y \mapsto f(x, y)$ , numérotés de telle sorte que  $\varphi_j(x) \in \gamma'$  pour  $j \leq n'$ . Posons

$$f'(x, y) = \prod_{j=1}^{n'} (y - \varphi_j(x)) \quad \text{et} \quad f''(x, y) = \prod_{j=n'+1}^n (y - \varphi_j(x))$$

pour tout  $(x, y) \in D_2$ . Les  $\varphi_j$  ne sont en général *pas* holomorphes (seules leurs fonctions symétriques élémentaires le sont). Il résulte néanmoins de la proposition 1 que, pour tout disque  $\Delta_1 \subset D_1^*$ , on peut faire en sorte que les  $\varphi_j$  soient holomorphes dans  $\Delta_1$ . Par suite,  $f'$  et  $f''$  sont holomorphes au voisinage de tout point  $(x, y)$  avec  $x \neq 0$ , donc dans tout  $D_2$  par le théorème d'extension de Riemann. En d'autres termes  $\underline{f} = \underline{f}' \underline{f}''$  est réductible. ■

PROPOSITION 3. Supposons  $\underline{f}$  irréductible. Alors il existe un nombre positif  $r$  et une fonction holomorphe  $\varphi$  dans  $D(r) = \{t \in \mathbb{C} \mid |t| < r\}$  tels que  $\begin{cases} D(r) \rightarrow \gamma_D \\ t \mapsto (t^n, \varphi(t)) \end{cases}$  soit un homéomorphisme.

*Preuve.* Avec les notations de la proposition 1, soient  $s$  le rayon de  $D_1$  et  $r$  la racine positive  $n$ -ième de  $s$ . Notons  $D(r)^*$  le disque  $D(r)$  privé de l'origine. Les applications  $t \mapsto t^n$  de  $D(r)^*$  sur  $D_1^*$  et  $(x, y) \mapsto x$  de  $\gamma_D^*$  sur  $D_1^*$  sont des revêtements holomorphes (proposition 1) connexes (propo-

sition 2) à  $n$  feuilles de l'espace  $D_1^*$  à groupe fondamental abélien. Il existe donc un isomorphisme analytique  $\Phi^*$  rendant le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & \Phi^* & \\ & \longrightarrow & \\ D(r)^* & \longrightarrow & \gamma_D^* \\ & \searrow & \swarrow \pi^* \\ & D_1^* & \end{array}$$

commutatif. Comme  $\Phi^*$  est borné, il se prolonge par continuité en un morphisme bijectif  $\Phi: D(r) \rightarrow \gamma_D$  de la forme  $t \mapsto (t^n, \varphi(t))$  avec  $\varphi \in \mathcal{O}(D(r))$ . C'est alors un exercice facile de topologie générale de montrer que  $\Phi$  est un homéomorphisme. ■

**COROLLAIRE.** Les courbes planes irréductibles sont des *variétés topologiques*.

Notons qu'une courbe plane (plus généralement une sous-variété de  $\mathbb{C}^k$ ) analytiquement singulière n'est jamais une variété différentiable; voir par exemple [14], §2.

La proposition 3 exprime  $\gamma_D$  paramétriquement par  $x = t^n$  et

$$y = \varphi(t) = a_0 t^m + a_1 t^{m+1} + \dots + a_k t^{m+k} + \dots (a_0 \neq 0);$$

on montre facilement qu'on ne restreint pas la généralité en supposant  $m \geq n$ . On écrit aussi

$$y = a_0 x^{m/n} + a_1 x^{(m+1)/n} + \dots + a_k x^{(m+k)/n} + \dots$$

et on parle alors du *développement de Puiseux* ou de la *série fractionnaire* associé au germe considéré.

## I.2. LES TANGENTES EN UN POINT D'UNE COURBE PLANE

Soient  $k$  un entier positif et  $\text{Ev}: {}_k\mathcal{O} \rightarrow \mathbb{C}$  l'évaluation à l'origine, qui n'est autre que la projection canonique de l'anneau local  ${}_k\mathcal{O}$  sur son corps résiduel.

**PROPOSITION 4.** L'anneau local  ${}_k\mathcal{O}$  est *hensélien*. En d'autres termes, soient  $P \in {}_k\mathcal{O}[t]$  un polynôme unitaire et  $\rho, \sigma \in \mathbb{C}[t]$  des polynômes unitaires étrangers tels que  $\text{Ev}(P) = \rho \sigma$ . Alors il existe des polynômes unitaires  $R$  et  $S$  dans  ${}_k\mathcal{O}[t]$  avec  $P = RS$ ,  $\text{Ev}(R) = \rho$  et  $\text{Ev}(S) = \sigma$ .

*Attention :*  $P$  n'est pas nécessairement un polynôme de Weierstrass.