Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 25 (1979)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SINGULARITÉS DE KLEIN
Autor: de la Harpe, P. / Siegfried, P.
Kapitel: I. COURBES PLANES
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-50380

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 06.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

tant qu'éléments de $K[X]$ [AC, VII, §3, nº 5, th. 2], ou encore si et seulement si leurs facteurs irréductibles (= éléments extrémaux) sont non équivalents deux à deux [A, VI, §1, nº 12, prop. 11 (DIV) et AC, VII, §3, nº 2, th. 1], ou enfin si et seulement si leur *résultant n'est pas nul* dans A (donc est inversible dans K); cette dernière affirmation est à un oubli de détail près le lemme 3 de l'appendice III de [7]. De même, les facteurs irréductibles de P sont non équivalents entre eux si et seulement si son discriminant n'est pas nul; on dit alors que P est *sans facteur multiple.*

Soient B un second anneau intègre et $\varphi: A \to B$ un homomorphisme appliquant 1 sur 1; nous désignons par la même lettre l'homomorphisme $A[X] \to B[X]$. Si Res (,) et Dis ( ) dénotent respectivement le résultant et le discriminant, il convient d'insister sur la propriété suivante, qui est très utile malgré sa banalité:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathrm{Res}(P, Q)) &= \mathrm{Res}(\varphi(P), \varphi(Q)) \\ \varphi(\mathrm{Dis}(P)) &= \mathrm{Dis}(\varphi(P)). \end{aligned}$$

Le cas le plus fréquent ci-dessous est celui ou $A = \mathcal{O}(D)$ est l'anneau des fonctions holomorphes sur un polycylindre D de $\mathbf{C}^k$ centré à l'origine, où $B = {}_k\mathcal{O}$ et où $\varphi: f \mapsto \underline{f}$ est l'injection canonique. Précisons à ce sujet que tous les *polycylindres* du texte sont *ouverts.*

Le travail du premier auteur a été rendu possible par le Fonds national suisse de la recherche scientifique.

I. COURBES PLANES

I.1. Singularités des courbes planes et revêtements

Soit $\underline{\gamma}$ un *germe de courbe plane.* On peut toujours supposer $\underline{\gamma}$ donné par les zéros d'un polynôme de Weierstrass (quitte à opérer un changement linéaire de coordonnées). Plus précisément, il existe

1º) Un polycylindre D_2 dans $\mathbf{C}^2$, centré à l'origine; nous noterons D_1 sa trace sur la droite $\mathbf{C} = \mathbf{C}_x$ de $\mathbf{C}^2 = \mathbf{C}^2_{xy}$.

2º) Un polynôme de Weierstrass $f \in \mathcal{O}(D_1)[y]$ de degré n, c'est-à-dire une fonction $f \in \mathcal{O}(D_2)$ avec

$$f(x, y) = y^n + a_1(x)\, y^{n-1} + \ldots + a_n(x)$$

pour tout $(x, y) \in D_2$, où les a_j sont des fonctions holomorphes dans D_1 qui s'annulent à l'origine.

Le germe $\underline{\gamma}$ est alors représenté par $\gamma_D = \{(x, y) \in D_2 \mid f(x, y) = 0\}$. Nous écrirons plus simplement γ si $D_2 = \mathbf{C}^2$. On peut toujours remplacer D_2 par un polycylindre plus petit; en particulier, on pourra toujours supposer que la projection canonique fournit par restriction une application π de γ_D *sur* D_1. Si $n = 1$, le changement de coordonnées $(x, y) \mapsto (x, y - a(x))$ montre que γ_D est lisse à l'origine; nous supposerons désormais $\underline{n \geqslant 2}$ (on prendra garde que ceci n'exclut pas tous les germes lisses, comme le montre le cas de $f(x, y) = y^2 - x$).

Proposition 1. Soit $\underline{\gamma}$ un germe donné comme ci-dessus. Alors la projection canonique de $\mathbf{C}^2$ sur $\mathbf{C}$ induit (après rétrécissement éventuel de D_2) un *revêtement* holomorphe à n feuilles

$$\pi^*\colon \gamma_D^* = \gamma_D - \{(0, 0)\} \to D_1^* = D_1 - \{0\}$$

Preuve. Le discriminant $\mathrm{Dis}(f)$ est un élément de $\mathcal{O}(D_1)$. Notons $\mathrm{Ev}\colon \mathcal{O}(D_1) \to \mathbf{C}$ le morphisme d'évaluation $g \mapsto g(0)$; alors $\mathrm{Ev}(\mathrm{Dis}(f)) = \mathrm{Dis}(\mathrm{Ev}(f))$. Or $\mathrm{Ev}(f) = y^n$ est un polynôme qui a par hypothèse $(n \geqslant 2)$ une racine multiple et son discriminant est nul. Par suite $\mathrm{Dis}(f)$ s'annule à l'origine.

On peut supposer que le germe à l'origine $\underline{f}$ de f est sans facteur multiple, de sorte que $\mathrm{Dis}(\underline{f})$ n'est pas nul. Mais $\mathrm{Dis}(\underline{f})$ est le germe de $\mathrm{Dis}(f)$. Par suite la fonction $\mathrm{Dis}(f)$ n'est pas nulle, ses zéros sont isolés, et on peut supposer (après rétrécissement de D_2 au besoin) que $\mathrm{Dis}(f)$ ne s'annule pas dans D_1^*.

Soient $a \in D_1^*$ et $\mathrm{Ev}_a\colon \mathcal{O}(D_1) \to \mathbf{C}$ l'évaluation $g \mapsto g(a)$. Comme $\mathrm{Dis}(\mathrm{Ev}_a(f)) = \mathrm{Ev}_a(\mathrm{Dis}(f)) \neq 0$, le polynôme $y \mapsto f(a, y)$ n'a pas de racine double; en d'autres termes $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, y) \neq 0$ si $(a, y) \in \gamma_D^*$. Par suite la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial y} \in \mathcal{O}(D_2)$ ne s'annule pas sur γ_D^*. Le théorème des fonctions implicites affirme dans cette situation que γ_D^* est une courbe lisse et que π^* est un isomorphisme analytique local. Ses fibres ayant toutes le même nombre n d'éléments, c'est de plus un revêtement. ■

Corollaire. Les singularités des courbes planes sont isolées.

PROPOSITION 2. On suppose $\underline{f}$ sans facteur multiple. Alors $\underline{f}$ est *réductible* si et seulement s'il existe un polycylindre D_2 tel que $\underline{f}$ ait un représentant $f \in \mathcal{O}(D_2)$ avec γ_D^* *non connexe.*

Preuve. Supposons $\underline{f} = \underline{f}' \, \underline{f}''$, avec $\underline{f}'$ et $\underline{f}''$ des polynômes de Weierstrass non constants et sans facteur commun; leur résultant est donc un élément non nul de ${}_1\mathcal{O}$. On peut choisir un polycylindre D_2 et des représentants f_D' et f_D'' de $\underline{f}'$ et $\underline{f}''$ tels que le résultant de f_D' et f_D'' soit une fonction de $\mathcal{O}(D_1)$ sans zéro dans D_1^*. Un argument déjà utilisé dans la preuve de la proposition 1 montre alors que f_D' et f_D'' n'ont pas de zéro commun dans $D_2 - \{(0, 0)\}$. Par suite les ensembles

$$\gamma' = \{ (x, y) \in D_2 \mid f_D'(x, y) = 0 \quad \text{et} \quad x \neq 0 \}$$

et

$$\gamma'' = \{ (x, y) \in D_2 \mid f_D''(x, y) = 0 \quad \text{et} \quad x \neq 0 \}$$

forment une partition en fermés non vides de γ_D^*, qui n'est donc pas connexe.

Supposons réciproquement qu'il existe un polycylindre D_2 tel que l'espace total du revêtement associé $\pi^*: \gamma_D^* \to D_1^*$ admette une partition en deux fermés non vides: $\gamma_D^* = \gamma' \cup \gamma''$. Par la proposition 1, le cardinal n' de $\gamma' \cap \pi^{-1}(x)$ ne dépend pas du choix de x dans D_1^*. Soient $\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_n(x)$ les zéros de la fonction $y \mapsto f(x, y)$, numérotés de telle sorte que $\varphi_j(x) \in \gamma'$ pour $j \leqslant n'$. Posons

$$f'(x, y) = \prod_{j=1}^{n'} (y - \varphi_j(x)) \quad \text{et} \quad f''(x, y) = \prod_{j=n'+1}^{n} (y - \varphi_j(x))$$

pour tout $(x, y) \in D_2$. Les φ_j ne sont en général *pas* holomorphes (seules leurs fonctions symétriques élémentaires le sont). Il résulte néanmoins de la proposition 1 que, pour tout disque $\Delta_1 \subset D_1^*$, on peut faire en sorte que les φ_j soient holomorphes dans Δ_1. Par suite, f' et f'' sont holomorphes au voisinage de tout point (x, y) avec $x \neq 0$, donc dans tout D_2 par le théorème d'extension de Riemann. En d'autres termes $\underline{f} = \underline{f}' \, \underline{f}''$ est réductible. ■

PROPOSITION 3. Supposons $\underline{f}$ irréductible. Alors il existe un nombre positif r et une fonction holomorphe φ dans $D(r) = \{t \in \mathbf{C} \mid |t| < r\}$ tels que $\begin{cases} D(r) \to \gamma_D \\ t \mapsto (t^n, \varphi(t)) \end{cases}$ soit un homéomorphisme.

Preuve. Avec les notations de la proposition 1, soient s le rayon de D_1 et r la racine positive n-ième de s. Notons $D(r)^*$ le disque $D(r)$ privé de l'origine. Les applications $t \mapsto t^n$ de $D(r)^*$ sur D_1^* et $(x, y) \mapsto x$ de γ_D^* sur D_1^* sont des revêtements holomorphes (proposition 1) connexes (propo-

sition 2) à n feuilles de l'espace D_1^* à groupe fondamental abélien. Il existe donc un isomorphisme analytique Φ^* rendant le diagramme

$$\begin{tikzcd} D(r)^* \arrow[rr, "\Phi^*"] \arrow[dr] & & \gamma_D^* \arrow[dl, "\pi^*"] \\ & D_1^* & \end{tikzcd}$$

commutatif. Comme Φ^* est borné, il se prolonge par continuité en un morphisme bijectif $\Phi: D(r) \to \gamma_D$ de la forme $t \mapsto (t^n, \varphi(t))$ avec $\varphi \in \mathcal{O}(D(r))$. C'est alors un exercice facile de topologie générale de montrer que Φ est un homéomorphisme. ■

COROLLAIRE. Les courbes planes irréductibles sont des *variétés topologiques.*

Notons qu'une courbe plane (plus généralement une sous-variété de $\mathbf{C}^k$) analytiquement singulière n'est jamais une variété différentiable; voir par exemple [14], §2.

La proposition 3 exprime γ_D paramétriquement par $x = t^n$ et

$$y = \varphi(t) = a_0 t^m + a_1 t^{m+1} + \ldots + a_k t^{m+k} + \ldots (a_0 \neq 0);$$

on montre facilement qu'on ne restreint pas la généralité en supposant $m \geqslant n$. On écrit aussi

$$y = a_0 x^{m/n} + a_1 x^{(m+1)/n} + \ldots + a_k x^{(m+k)/n} + \ldots$$

et on parle alors du *développement de Puiseux* ou de la *série fractionnaire* associé au germe considéré.

I.2. LES TANGENTES EN UN POINT D'UNE COURBE PLANE

Soient k un entier positif et $\mathrm{Ev}: {}_k\mathcal{O} \to \mathbf{C}$ l'évaluation à l'origine, qui n'est autre que la projection canonique de l'anneau local ${}_k\mathcal{O}$ sur son corps résiduel.

PROPOSITION 4. L'anneau local ${}_k\mathcal{O}$ est *hensélien.* En d'autres termes, soient $P \in {}_k\mathcal{O}[t]$ un polynôme unitaire et $\rho, \sigma \in \mathbf{C}[t]$ des polynômes unitaires étrangers tels que $\mathrm{Ev}(P) = \rho\sigma$. Alors il existe des polynômes unitaires R et S dans ${}_k\mathcal{O}[t]$ avec $P = RS$, $\mathrm{Ev}(R) = \rho$ et $\mathrm{Ev}(S) = \sigma$.

Attention : P n'est pas nécessairement un polynôme de Weierstrass.

Preuve. Notons $\mathrm{Ev}(P)(t) = P(0, t) = \prod (t-\lambda_j)^{s_j}$, avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ distincts. (Dans cette preuve, les produits $\prod$ portent sur l'indice j de 1 à n et les $\prod'$ portent sur j de 2 à n). Nous voulons montrer par induction sur n qu'il existe des polynômes unitaires $P_1, \ldots, P_n$ dans ${}_k\mathcal{O}[t]$ avec $P = \prod P_j$ et $\mathrm{Ev}(P_j)(t) = (t-\lambda_j)^{s_j}$. Cette assertion étant trivialement vraie pour $n = 1$, on peut supposer $n \geqslant 2$ et qu'elle est vraie pour tous les polynômes dont l'évaluation a au plus $n - 1$ racines distinctes.

Supposons d'abord que $P(0, 0) = 0$ et que $\mathrm{Ev}(P) = t^{s_1} \prod' (t-\lambda_j)^{s_j}$. Le théorème de préparation permet d'écrire

$$P(x; t) = u(x, t)\,[t^{s_1} + a_1(x)\,t^{s_1-1} + \ldots + a_{s_1}(x)]$$

où u est un polynôme de ${}_k\mathcal{O}[t]$ inversible dans ${}_{k+1}\mathcal{O}$ et où les a_j sont des germes dans ${}_k\mathcal{O}$ qui sont nuls à l'origine. Par suite

$$Ev(P)(t) = u(0, t)\,t^{s_1} = t^{s_1} \prod' (t-\lambda_j)^{s_j}$$

et $u(0, t) = \prod' (t-\lambda_j)^{s_j}$. Par hypothèse d'induction, il existe $P_2, \ldots, P_n$ dans ${}_k\mathcal{O}[t]$ avec $u = \prod' P_j$ et $P_j(0, t) = (t-\lambda_j)^{s_j}$ pour $j = 2, \ldots, n$. On achève en posant

$$P_1(x, t) = t^{s_1} + a_1(x)\,t^{s_1-1} + \ldots + a_{s_1}(x)\,.$$

Supposons au contraire que $P(0, 0) \neq 0$. Soient $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $P(0, \lambda) = 0$ et P^T le polynôme défini par $P^T(x, t) = P(x, t+\lambda)$. Alors P^T est un produit de n facteurs P_j^T par l'argument précédent et on achève en posant $P_j(x, t) = P_j^T(x, t-\lambda)$ pour $j = 1, \ldots, n$. ■

Notons qu'il existe d'autres définitions (équivalentes à celle de la proposition) pour un anneau local d'être hensélien; voir par exemple [AC, III, §4, ex. 3].

Soient $\underline{\gamma}$, D_2, f et γ_D comme au début de la section 1. Ecrivons la série de Taylor de f à l'origine sous la forme $f(x, y) = \sum h_j(x, y)$ (somme sur j de p à l'infini), où h_j est un polynôme homogène de degré j en x et y et où $h_p \neq 0$. Le polynôme h_p est un produit de facteurs linéaires. Quitte à modifier les axes de coordonnées, on peut supposer que h_p ne s'annule pas sur la droite d'équation $x = 0$, donc que $h_p(x, y) = c \prod (y-\lambda_j x)^{s_j}$ avec c un nombre complexe, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ des nombres complexes distincts, et $s_1, \ldots, s_m$ des entiers positifs de somme p. Les droites d'équation $y = \lambda_j x$ sont par définition les *tangentes* de $\underline{\gamma}$. Pour chaque entier $j \geqslant p$, on a $h_j(0, y)$ proportionnel à y^j, et $h_p(0, y) = cy^p$ avec $c \neq 0$. Par suite, f est une fonction régulière d'ordre p en y; avec les notations du début de la section 1, on a donc $p = n$. Cet entier s'appelle la *multiplicité* de f à l'origine; il ne dépend pas des coordonnées choisies sur $\mathbf{C}^2$.

PROPOSITION 5. Si $\underline{\gamma}$ a plusieurs tangentes, alors $\underline{f}$ est réductible.

Preuve. Comme

$$f(x, y) = y^n + a_1(x)\, y^{n-1} + \ldots + a_n(x) = \sum_{j=n}^{\infty} h_j(x, y)$$

l'ordre du zéro de a_i à l'origine est au moins i ($i = 1, \ldots, n$). Nous écrirons

$$f(x, y) - h_n(x, y) = b_1(x)\, y^{n-1} + b_2(x)\, y^{n-2} + \ldots + b_n(x)$$

et $b_i(x) = x^{i+1} c_i(x)$, où c_i représente un germe holomorphe à l'origine ($i = 1, \ldots, n$).

Si u et v décrivent de petits voisinages de l'origine dans $\mathbf{C}$, la fonction $(u, v) \mapsto f(v, uv)$ est divisible par v^n. Définissons $\underline{\tilde{f}} \in {}_2\mathcal{O}$ par $\tilde{f}(u, v) = v^{-n} f(v, uv)$; on a donc

$$\tilde{f}(u, v) = h_n(1, u) + vc_1(v)\, u^{n-1} + vc_2(v)\, u^{n-2} + \ldots + vc_n(v)\,.$$

L'évaluation Ev: ${}_1\mathcal{O} \to \mathbf{C}$ associe au polynôme $\tilde{f} \in {}_1\mathcal{O}[u]$ le polynôme $u \mapsto h_n(1, u)$ de $\mathbf{C}[u]$.

Si $\underline{\gamma}$ a plusieurs tangentes, il résulte de la proposition 4 que $\tilde{f}$ est un produit dans ${}_1\mathcal{O}[u]$ de polynômes unitaires $\tilde{g}$ et $\tilde{h}$ de degrés respectifs $r < n$ et $s < n$. Définissons alors g et h dans ${}_1\mathcal{O}[y]$ par $g(x, y) = x^r \tilde{g}(y/x, x)$ et $h(x, y) = x^s \tilde{h}(y/x, x)$. Alors $f = gh$ et $\underline{f}$ est réductible. ■

La signification géométrique de $\tilde{f}$ dans la preuve ci-dessus sera éclairée au numéro suivant.

Par exemple, le polynôme réductible xy définit une courbe ayant deux tangentes à l'origine. La réciproque à la proposition 5 n'est pas vraie car le polynôme réductible $x(x^2 - y^3)$ définit une courbe n'ayant qu'une tangente à l'origine.

I.3. ECLATEMENT ET IRRÉDUCTIBILITÉ

Pour tout entier positif k, nous noterons h la projection canonique de $\mathbf{C}^{k+1} - \{0\}$ sur l'espace projectif P^k; nous écrirons $(\omega_0, \ldots, \omega_k)$ les coordonnées d'un vecteur de $\mathbf{C}^{k+1}$ et $[z_0, \ldots, z_k]$ les coordonnées homogènes d'un point de P^k. Introduisons la variété

$$S_{(-k)} = \{([z_0, z_1], w) \in P^1 \times \mathbf{C}^{k+1} \mid w \in h^{-1}([z_0^k, z_0^{k-1} z_1, \ldots, z_1^k]) \cup \{0\}\}$$

et la restriction $\pi_{(-k)}$ à $S_{(-k)}$ de la seconde projection du produit $P^1 \times \mathbf{C}^{k+1}$. Nous écrirons aussi $\pi\colon S \to \mathbf{C}^2$ lorsque $k = 1$; cette application est alors par définition l'*éclatement de* $\mathbf{C}^2$ *à l'origine*.

Ecrivons cela dans les cartes standards. Les indices j ci-dessous sont à prendre dans $\{0, 1\}$.

Posons $\tilde{U}_j = \{(z_0, z_1) \in \mathbf{C}^2 - \{0\} \mid z_j \neq 0\}$ et $U_j = h(\tilde{U}_j)$. Soit $\tilde{\varphi}_j\colon \tilde{U}_j \to \mathbf{C}$ l'application qui associe à (z_0, z_1) le quotient z_1/z_0 si $j = 0$ et le quotient z_0/z_1 si $j = 1$; elle passe au quotient et définit une bijection $\varphi_j\colon U_j \to \mathbf{C}$. Les changements de cartes de l'atlas analytique ainsi défini sur P^1 sont

$$\begin{cases} \mathbf{C}^* = \varphi_0(U_0 \cap U_1) \to \varphi_1(U_0 \cap U_1) = \mathbf{C}^* \\ \qquad\qquad u \mapsto u^{-1} \end{cases}$$

et l'isomorphisme inverse.

Considérons ensuite la restriction $\lambda_{(-k)}\colon S_{(-k)} \to P^1$ de la première projection du produit $P^1 \times \mathbf{C}^{k+1}$. Posons $S_{(-k),j} = \lambda_{(-k)}{}^{-1}(U_j)$ et soient $\psi_j\colon S_{(-k),j} \to \mathbf{C}^2$ les bijections définies par $\psi_0([z], \omega) = (\varphi_0([z]), \omega_0)$ et $\psi_1([z], \omega) = (\varphi_1([z]), \omega_k)$; les applications inverses sont respectivement

$$(u, v) \mapsto ([1, u],\ (v, uv, \ldots, u^k v))$$

et

$$(u, v) \mapsto ([u, 1],\ (u^k v, u^{k-1} v, \ldots, v)).$$

Les changements de cartes de l'atlas analytique ainsi défini sur $S_{(-k)}$ sont

$$\begin{cases} \mathbf{C}^* \times \mathbf{C} = \psi_0(S_{(-k),0} \cap S_{(-k),1}) \to \psi_1(S_{(-k),0} \cap S_{(-k),1}) = \mathbf{C}^* \times \mathbf{C} \\ \qquad\qquad (u, v) \mapsto (u^{-1}, u^k v) \end{cases}$$

et l'isomorphisme inverse.

La variété $S_{(-k)}$ est donc l'espace total d'un fibré holomorphe en droites de projection $\lambda_{(-k)}\colon S_{(-k)} \to P_1$. Les fonctions de transition associées au recouvrement trivialisant (U_0, U_1) de P^1 sont

$$\psi_{1,0} : \begin{cases} U_0 \cap U_1 \to \mathbf{C}^* \\ [z_0, z_1] \mapsto (z_1/z_0)^k \end{cases}$$

et

$$\psi_{0,1} : \begin{cases} U_1 \cap U_0 \to \mathbf{C}^* \\ [z_0, z_1] \mapsto (z_0/z_1)^k. \end{cases}$$

En particulier, le fibré $\lambda_{(-k)}$ est la puissance tensorielle k-ième du *fibré canonique* $\lambda = \lambda_{(-1)}$. Nous avons construit $\lambda_{(-k)}$ comme l'image inverse du fibré canonique sur P^k par le « morphisme de Véronèse » de P^1 dans P^k, qui est une application de « degré » k. Le signe dans l'indice $(-k)$ exprime que la classe de Chern du fibré $\lambda_{(-k)}$ évaluée sur la classe fondamentale est négative. Le lecteur savant aura reconnu ci-dessus au moins deux bonnes raisons pour lesquelles la classe de Chern de $\lambda_{(-k)}$ est $-k$ (multiplicativité par produit tensoriel et multiplication par le degré); indiquons-en une troisième qui n'utilise que des notions encore plus rudimentaires (voir par exemple [7], chap. 0, §5, prop. 2).

Considérons la section méromorphe $s: P^1 \dashrightarrow S_{(-k)}$ du fibré $\lambda_{(-k)}$ décrite par les applications

$$s_0 : \begin{cases} U_0 \to S_{(-k),0} \\ u \mapsto (u, u) \end{cases} \quad \text{et} \quad s_1 : \begin{cases} U_1 \dashrightarrow S_{(-k),1} \\ u \dashmapsto (u, u^{-k-1}) . \end{cases}$$

Alors s a un zéro simple, en un point correspondant à l'origine de U_0, un pôle d'ordre $k + 1$, en un point correspondant à l'origine de U_1, et n'a ni autres zéros ni autres pôles. Les différentielles logarithmiques de s aux voisinages de son zéro et de son pôle se représentent respectivement par $d(\log u) = u^{-1}\, du$, de résidu $+1$, et $d(\log u^{-k-1}) = -(k+1)\, u^{-1}\, du$, de résidu $-(k+1)$. Il en résulte que la *classe de Chern* du fibré $\lambda_{(-k)}$ vaut $1 - (k+1) = -k$.

L'application $\pi: S \to \mathbf{C}^2$ s'exprime dans les cartes standards par

$$\pi_0 : \begin{cases} \mathbf{C}^2 = \psi_0(S_0) \to \mathbf{C}^2 \\ (u, v) \mapsto (v, uv) \end{cases}$$

et

$$\pi_1 : \begin{cases} C^2 = \psi_1(S_1) \to C^2 \\ (u, v) \mapsto (uv, v) . \end{cases}$$

On appellera *courbe exceptionnelle* de l'éclatement π et on notera E la courbe $\pi^{-1}(0, 0)$, qui est lisse et isomorphe à P^1. Elle est donnée dans les cartes par

$$E_0 = \psi_0(E \cap S_0) = \{(u, v) \in \mathbf{C}^2 \mid v = 0\}$$

et

$$E_1 = \psi_1(E \cap S_1) = \{(u, v) \in \mathbf{C}^2 \mid v = 0\} .$$

On notera que, en général, l'image de la section nulle du fibré $\lambda_{(-k)}$ coïncide avec ${\pi_{(-k)}}^{-1}(0)$.

* * *

Soient alors $\underline{\gamma}$, D_2, f et γ_D ou γ comme au début de la section 1. On appelle *transformée stricte* de γ_D et on note $\tilde{\pi}^{-1}(\gamma_D)$ ou $\tilde{\gamma}_D$ l'adhérence dans $\tilde{D}_2 = \pi^{-1}(D_2)$ de $\pi^{-1}(\gamma_D^*)$, avec comme plus haut $\gamma_D^* = \gamma_D - \{0\}$.

Exemple 1. $D_2 = \mathbf{C}^2$ et $f(x, y) = xy$. Alors γ a deux composantes irréductibles qui sont l'axe γ' d'équation $y = 0$ et l'axe γ'' d'équation $x = 0$, de sorte que $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}' \cup \tilde{\gamma}''$. Or $\tilde{\gamma}'$ est l'adhérence de $\{([z], \omega) \in S \mid \omega = (x, 0)$ et $x \neq 0\}$, qui est $\{([z], \omega) \in S \mid [z] = [1, 0]\}$. De même $\tilde{\gamma}'' = \{([z], \omega) \in S \mid [z] = [0, 1]\}$. Dans les cartes standards:

$$\psi_0(\tilde{\gamma}') = \{(u, v) \in \mathbf{C}^2 \mid u = 0\}$$

$$\tilde{\gamma}' \cap S_1 = \tilde{\gamma}'' \cap S_0 = \varnothing$$

$$\psi_1(\tilde{\gamma}'') = \{(u, v) \in \mathbf{C}^2 \mid u = 0\}.$$

On retiendra que $\tilde{\gamma}$ est réunion de deux courbes lisses disjointes et que $\pi^{-1}(\gamma) = \tilde{\gamma} \cup E$ est réunion de trois courbes lisses sans point triple et à intersections transverses.

Plus généralement, si γ est réunion de m droites distinctes dans $\mathbf{C}^2$ passant par l'origine, sa transformée stricte est réunion de m courbes lisses disjointes coupant chacune la courbe exceptionnelle en un point et transversalement.

Exemple 2. $D_2 = \mathbf{C}^2$ et $f(x, y) = x^2 - y^3$. Alors $\tilde{\gamma}$ est l'adhérence de $\{([z], \omega) \in S \mid \omega = (t^3, t^2)$ et $t \in \mathbf{C}^*\}$, qui est $\{([t, 1], (t^3, t^2)) \in S \mid t \in \mathbf{C}\} \subset S_1$. Dans les cartes, $\psi_0(\tilde{\gamma} \cap S_0)$ est l'adhérence de $\{(u, v) \in \mathbf{C}^2 \mid u = t^{-1}, v = t^3, t \in \mathbf{C}^*\}$ et $\psi_1(\tilde{\gamma} \cap S_1)$ celle de $\{(u, v) \in \mathbf{C}^2 \mid u = t, v = t^2, t \in \mathbf{C}^*\}$. Ecrit sans paramètre:

$$\psi_0(\tilde{\gamma} \cap S_0) = \{(u, v) \in \mathbf{C}^2 \mid u^3 v = 1\}$$

$$\psi_1(\tilde{\gamma} \cap S_1) = \{(u, v) \in \mathbf{C}^2 \mid u^2 = v\}.$$

Par suite $\tilde{\gamma}$ est une courbe lisse, et $\pi^{-1}(\gamma) = \tilde{\gamma} \cup E$ est réunion de deux courbes lisses se coupant au seul point $\psi_1^{-1}(0, 0)$. Cette intersection n'étant pas transverse, on itère le procédé en espérant éliminer ce « défaut ».

Au voisinage de ce point d'intersection, $\pi^{-1}(\gamma)$ définit un germe $\underline{\delta}$; on le représente par la courbe δ, zéro de la fonction $g \in \mathcal{O}(C^2)$ définie par $g(x, y) = y(x^2 - y)$. La transformée stricte est donnée dans les cartes par

$$\psi_0(\tilde{\delta} \cap S_0) = \{(u, v) \in \mathbf{C}^2 \mid u(v-u) = 0\}$$
$$\psi_1(\tilde{\delta} \cap S_1) = \{(u, v) \in \mathbf{C}^2 \mid u^2 v = 1\}.$$

Par suite $\tilde{\delta}$ est réunion de deux courbes lisses se coupant en un seul point et transversalement; d'autre part $\pi^{-1}(\delta)$ est réunion de trois courbes lisses se coupant en un seul point, et transversalement deux à deux.

Au voisinage de ce point triple, $\pi^{-1}(\delta)$ définit un germe $\underline{\varepsilon}$. La remarque à la fin de l'exemple 1 montre que $\underline{\varepsilon}$ conduit à une transformée stricte qui est réunion de trois courbes lisses disjointes coupant la courbe exceptionnelle transversalement et en des points distincts.

En composant ces trois éclatements, on obtient une *résolution de la singularité* $\underline{\gamma}$ *plongée* dans $\mathbf{C}^2$, au sens du théorème 8.4 de [17]. En d'autres termes, on obtient une variété lisse M et une application $\zeta: M \to \mathbf{C}^2$ ayant les propriétés suivantes:

1) ζ induit un isomorphisme de $M - \zeta^{-1}(0)$ sur $\mathbf{C}^2 - \{0\}$;
2) l'adhérence $\tilde{\zeta}^{-1}(\gamma)$ de $\zeta^{-1}(\gamma^*)$ dans M est une courbe lisse;
3) $\zeta^{-1}(\gamma)$ est une réunion de courbes lisses sans point triple qui se coupent transversalement.

Revenons au cas général et soit à nouveau n la multiplicité de f à l'origine; nous supposons comme à la section 2 que la droite d'équation $x = 0$ n'est pas une tangente de $\underline{\gamma}$. Nous appellerons *transformée stricte de la fonction* f et nous noterons $\tilde{f}$ la fonction définie pour tout $(u, v) \in \Delta_2 = \psi_0(\pi^{-1}(D_2) \cap S_0)$ par $\tilde{f}(u, v) = v^{-n} f(v, uv)$.

PROPOSITION 6. Avec les notations déjà introduites:

(j) $\psi_0(\tilde{\gamma}_D \cap S_0) = \{(u, v) \in \Delta_2 \mid \tilde{f}(u, v) = 0\}$.

(jj) Si $\underline{f}$ est irréductible, alors $\tilde{f}$ s'annule en un seul point de E_0 et y définit un germe $\underline{\tilde{f}} \in {}_2\mathcal{O}$ qui est irréductible.

(jjj) Supposons $\underline{f}$ irréductible et soient n et $\tilde{n}$ les multiplicités de f et $\tilde{f}$; alors $\tilde{n} \leqslant n$ et $\tilde{n} < n$ si et seulement si E_0 est une tangente à $\tilde{\gamma}$.

Preuve. Supposons $(u, v) \in \psi_0(\tilde{\gamma}_D \cap S_0)$; alors $\pi_0(u, v) = (v, uv) \in \gamma_D$, donc $f(v, uv) = 0$. Si $v \neq 0$, cela implique $\tilde{f}(u, v) = 0$ par définition de $\tilde{f}$; c'est encore vrai par continuité si $v = 0$.

Supposons $(u, v) \in \Delta_2$ avec $\tilde{f}(u, v) = 0$, alors $f(\pi_0(u, v)) = v^n \tilde{f}(u, v) = 0$, donc $\psi_0^{-1}(u, v) \in \pi^{-1}(\gamma_D) \cap S_0$. Si $v \neq 0$, cela s'écrit $\psi_0^{-1}(u, v) \in \tilde{\gamma}_D \cap S_0$. Si $v = 0$, la fonction $u \mapsto \tilde{f}(u, 0)$ est de la forme $u \mapsto c \prod (u - \lambda_j)^{s_j}$ avec c non nul et $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ distincts (voir la proposition 5). Elle s'annule donc aux points $(\lambda_j, 0)$ de E_0; ceux-ci étant en nombre fini, leurs images inverses par ψ_0 sont par continuité dans $\tilde{\gamma}_D \cap S_0$. L'assertion (j) en résulte.

Si $\underline{f}$ est irréductible, il n'y a qu'un λ_j (voir la preuve de la proposition 4); $\tilde{f}$ ne s'annule qu'en un point de E_0 et y définit un germe $\underline{\tilde{f}}$. L'application π induit un homéomorphisme de $S - E$ sur $\mathbf{C}^2 - \{0\}$, donc aussi de $\pi^{-1}(\gamma_D^*) = \tilde{\gamma}_D - (\tilde{\gamma}_D \cap E)$ sur γ_D^*. L'assertion (jj) résulte donc de la proposition 2.

Quitte à changer linéairement les coordonnées, on peut supposer que la tangente à $\underline{\gamma}$ est l'axe d'équation $y = 0$. Pour tout $(x, y) \in D_2$, on a maintenant

$$f(x, y) = y^n + b_1(x) y^{n-1} + \ldots + b_n(x)$$

et $b_i(x) = x^{i+1} c_i(x)$ où c_i est holomorphe à l'origine. Pour tout $(u, v) \in \Delta_2$, on a donc

$$\tilde{f}(u, v) = u^n + v c_1(v) u^{n-1} + \ldots + v c_n(v),$$

d'où en particulier $\tilde{n} \leqslant n$. Si $\tilde{n} = n$, alors $\tilde{f}(u, v) = \sum \tilde{h}_j(u, v)$ (somme de n à l'infini) avec $\tilde{h}_n(u, v) = u^n + vk(u, v)$ pour un polynôme homogène k ad hoc, nul ou de degré $n - 1$; dans ce cas, la courbe E_0 d'équation $v = 0$ n'est pas tangente à $\psi_0(\tilde{\gamma}_D \cap S_0)$. Si $\tilde{n} < n$, alors $\tilde{f}(u, v) = \sum \tilde{h}_j(u, v)$ (somme de $\tilde{n}$ à l'infini) avec $\tilde{h}_{\tilde{n}}$ divisible par v; dans ce cas, E_0 est tangente à $\psi_0(\tilde{\gamma}_D \cap S_0)$. ■

Exemple 3. $D_2 = \mathbf{C}^2$ et $f(x, y) = x^5 + y^2$. On peut montrer brutalement que $\underline{f}$ est irréductible. On peut aussi observer que la paire formée de $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ et de γ^* se rétracte par déformation sur la paire formée de $\mathbf{S}^3 = \{(x, y) \in \mathbf{C}^2 \mid |x|^2 + |y|^2 = 1\}$ et d'un nœud du tore: la rétraction

applique un point (x, y) sur l'intersection avec $\mathbf{S}^3$ de l'image du chemin $\begin{cases} \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{C}^2 \\ t \mapsto (t^2x, t^5y) \end{cases}$. En particulier γ^* est connexe et $\underline{f}$ est bien irréductible.

La transformée stricte de f est donnée par

$$\tilde{f}(u, v) = v^{-2}(v^5 + (uv)^2) = u^2 + v^3$$

qui est comme f de multiplicité 2. La tangente de $\underline{\tilde{f}}$ est la droite d'équation $u = 0$, qui est transverse à E_0.

Soient alors $D_2 = \mathbf{C}^2$ et $g(x, y) = x^3 + y^2$ de sorte que $\underline{g} = \underline{\tilde{f}}$ (pas $g(x, y) = x^2 + y^3$ qui aurait comme tangente la droite d'équation $x = 0$). On a $\tilde{g}(u, v) = u^2 + v$, qui est de multiplicité 1, et dont la tangente à l'origine est bien E_0.

Exemple 4. $D_2 = \mathbf{C}^2$ et $f(x, y) = y^5 + x^5y + g(x, y)$ avec g de multiplicité 8 au moins. Montrons que $\underline{f}$ est réductible.

On a $\tilde{f}(u, v) = u^5 + uv + h(u, v)$ avec h d'ordre 3 au moins. Donc $\underline{\tilde{f}}$ a deux tangentes, d'où l'assertion par les propositions 5 et 6 (jj).

II. SINGULARITÉS NORMALES DANS $\mathbf{C}^3$

II.1. Ensembles normaux

Si X est un ensemble analytique, $X_{\text{rég}}$ désigne l'ouvert de ses *points réguliers*; on sait qu'il est dense dans X. (Voir le corollaire de la proposition 1 si X est une courbe plane, l'argument de la proposition 7 ci-dessous si X est une hypersurface dans $\mathbf{C}^k$, et le théorème III. C.3 de [8] en général.)

Rappelons qu'un ensemble X est *irréductible* en un point p si X n'est pas au voisinage de p réunion de deux sous-ensembles propres. Dans ce cas, on peut trouver un voisinage de p dont la trace sur $X_{\text{rég}}$ est connexe. Réciproquement, s'il existe un bon voisinage U de P dans X dont la trace sur $X_{\text{rég}}$ est connexe, alors X est irréductible en p. (Voir la proposition 2 si X est une courbe plane, et la fin de la section III.C de [8] pour le cas général.) Le terme de « bon voisinage » pour U signifie qu'il existe une base de voisinages $\{U_\alpha\}$ de p dans X telle que chaque $U_\alpha - \{p\}$ soit un rétracte par déformation de $U - \{p\}$; voir [21].