

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 24 (1978)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** UNIVALENT FUNCTIONS, SCHWARZIAN DERIVATIVES AND QUASICONFORMAL MAPPINGS

**Autor:** Lehto, Olli

### **Bibliographie**

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-49701>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 27.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

we conclude that  $d(\{S_h\}, U(H) - T(H)) \geq 2 - \sigma_1$ . Consequently, by Lemma 5.2,

$$(5.2) \quad \sigma_3 \geq 2 - \sigma_1.$$

In order to prove that this inequality is sharp, we consider the point  $S_w$ , where  $w$  is the restriction to  $H$  of a branch of the logarithm. Since the boundary of  $w(H)$  is not a quasicircle,  $S_w \in U(H) - T(H)$ . From  $S_w(z) = z^{-2}/2$  it follows that  $\|S_w\|_H = 2$ . Let  $h$  be determined by the condition  $S_h = r S_w$ ,  $0 < r < 1$ , and set  $A = h(H)$ . From  $\|S_h\|_H < 2$  it follows that  $S_h \in T(H)$ , and so  $\partial A$  is a quasicircle. Now

$$\sigma_3 = d(\{S_h\}, U(H) - T(H)) = \|S_w - S_h\| = 2(1-r) = 2 - \sigma_1,$$

showing that (5.2) is sharp.

Suppose that  $2 \leq \sigma_1 < 6$ . We then conclude from the remark at the end of 5.3 that, even though  $\sigma_3 > 0$  for each  $A$ , we have  $\inf \sigma_3 = 0$  for every  $\sigma_1$ .

Similarly, Lemma 5.2 can be used to deriving the upper estimate

$$\sigma_3 \leq \min(2, 6 - \sigma_1).$$

(For the details we refer to [9].)

#### REFERENCES

- [1] AHLFORS, L. V. Quasiconformal reflections. *Acta Math.* 109 (1963), pp. 291-301.
- [2] GEHRING, F. W. Univalent functions and the Schwarzian derivative. *Comment. Math. Helv.* 52 (1977), pp. 561-572.
- [3] ——— Spirals and the universal Teichmüller space. *To appear in Acta Math.*
- [4] GEHRING, F. W. and J. VÄISÄLÄ. Hausdorff dimension and quasiconformal mappings. *J. London Math. Soc.* (1973).
- [5] HILLE, E. Remarks on a paper by Zeev Nehari. *Bull. Amer. Math. Soc.* 55 (1949), pp. 552-553.
- [6] KRAUS, W. Über den Zusammenhang einiger Charakteristiken eines einfach zusammenhängenden Bereichs mit der Kreisabbildung. *Mitt. math. Semin. Giessen* 21 (1932).
- [7] KÜHNAU, R. Wertannahmeprobleme bei quasikonformen Abbildungen mit ortsabhängiger Dilatationsbeschränkung. *Math. Nachr.* 40 (1969).
- [8] LEHTO, O. Schlicht functions with a quasiconformal extension. *Ann. Acad. Sci. Fenn. A I* 500 (1971).
- [9] ——— Domain constants associated with Schwarzian derivative. *Comment. Math. Helv.* 52 (1977), pp. 603-610.
- [10] ——— Univalent functions and Teichmüller theory. *Proc. of the First Finnish-Polish Summer School in Complex Analysis at Podlesice, University of Lodz* (1977), pp. 11-33.

- [11] LEHTO, O. and K. I. VIRTANEN. *Quasiconformal mappings in the plane*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1973.
- [12] NEHARI, Z. The Schwarzian derivative and schlicht functions. *Bull. Amer. Math. Soc.* 55 (1949), pp. 545-551.
- [13] ——— A property of convex conformal maps. *J. Analyse Math.* 30 (1976), pp. 390-393.
- [14] PAATERO, V. Über die konforme Abbildung von Gebieten, deren Ränder von beschränkter Drehung sind. *Ann. Acad. Sci. Fenn. A* 33, 9 (1930).
- [15] PFLUGER, A. Über die Konstruktion Riemannscher Flächen durch Verheftung. *J. Indian Math. Soc.* 24 (1960), pp. 401-412.
- [16] TIENARI, M. Fortsetzung einer quasikonformen Abbildung über einen Jordanbogen. *Ann. Acad. Sci. Fenn. A I* 324 (1962).

(Reçu le 15 mai 1978)

O. Lehto

University of Helsinki  
Finland