

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 24 (1978)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: EINIGE VERZERRUNGSAUSSAGEN BEI QUASIKONFORMEN
ABBILDUNGEN ENDLICH VIELFACH ZUSAMMENHÄNGENDER
GEBIETE

Autor: Kühnau, Reiner
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-49700>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 24.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

EINIGE VERZERRUNGSAUSSAGEN
BEI QUASIKONFORMEN ABBILDUNGEN
ENDLICH VIELFACH ZUSAMMENHÄNGENDER GEBIETE¹

von Reiner KÜHNAU

I. Eine zentrale Rolle in der geometrischen Funktionentheorie spielt die Betrachtung von Extremalproblemen. In der Theorie der schlichten konformen Abbildungen endlich vielfach zusammenhängender Gebiete liegt hier heute eine gewisse prinzipielle Klärung vor. Und zwar ist nach den Arbeiten von H. Grötzsch bekannt und von O. Teichmüller in einem Prinzip formuliert worden, wie sich die Lösungen charakterisieren lassen, falls man z.B. Funktionale betrachtet, die von endlich vielen Funktionswerten und Ableitungen in vorgegebenen Stellen abhängen. Auf solche Funktionale wollen wir uns hier beschränken. Hierunter fallen insbesondere Beträge von Koeffizienten. Und zwar sind dann die Extremalabbildungen $w = w(z)$ so beschaffen, dass die Bildrandkomponenten Schlitze sind, für die gilt

$$\mathcal{Q}(w) d w^2 \geqq 0.$$

Dabei wird in diesem „quadratischen Differential“ $\mathcal{Q}(w)$ eine gewisse rationale Funktion im einfachsten Falle, die Abbildungen werden auf der Vollkugel als „Träger“ betrachtet.

Gehen wir nun zu quasikonformen Abbildungen über, d.h., schlichten Abbildungen, die — bei z.B. gewissen Glattheitsvoraussetzungen — so beschaffen sind, dass in jedem Punkt infinitesimale Kreise in infinitesimale Ellipsen übergehen, deren Achsenverhältnis $\geqq 1$ (Dilatation der Abbildung genannt) überall eine vorgegebene Schrankenfunktion $\geqq 1$ nicht übersteigt. Im Falle, diese Schranke wird als Konstante > 1 vorgegeben, ergibt sich in Beispielen auch schon aus den Arbeiten von H. Grötzsch, dass bei einer gewissen Klasse von Extremalfunktionen obige Charakterisierung der Bildrandkomponenten gültig bleibt. Es kommt dann noch als Charakterisierung der Abbildungen im Innern des transformierten Gebietes hinzu, dass die Dilatation überall gleich der Schrankenfunktion ist, wobei in

¹⁾ Communicated (in absentia) to an International Symposium on Analysis, held in honour of Professor Albert Pfluger, ETH Zürich, 1978.

Richtung der grossen Achsen der genannten infinitesimalen Bildellipsen ebenfalls $\mathcal{Q}(w) dw^2 \geqq 0$ ist. Hierbei sind allerdings zunächst nur solche Funktionale zugelassen, die keine Ableitungen enthalten, da diese — jedenfalls im gewöhnlichen Sinne — bei quasikonformen Abbildungen i. allg. nicht existieren. Dieser Übelstand tritt nicht auf, wenn man allgemeiner ortsabhängige Dilatationsschranken betrachtet. Diese kann man dann nämlich in Teilgebieten $\equiv 1$ setzen, was dann dort die Konformität der zur Konkurrenz zugelassenen Abbildungen nach sich zieht. Tatsächlich stellte sich heraus, dass in diesem allgemeineren Falle die genannte geometrisch-funktionentheoretische Charakterisierung der Extremalabbildungen unverändert gültig bleibt. Jedoch sind damit i. allg. noch lange nicht die Extremalfunktionen selbst und der zugehörige extremele Wert des betreffenden Funktionals bestimmt. Dies läuft dann noch auf die Auflösung eines partiellen Differentialgleichungssystems hinaus, was nur in Einzelfällen geschlossen gelingt.

Im folgenden soll nun über ein Verfahren berichtet werden, das in elementarer Weise zu Abschätzungen für das betreffende Funktional führt, falls z.B. das quadratische Differential ein vollständiges Quadrat ist. Diese Abschätzungen sind zwar unscharf, jedoch asymptotisch scharf, falls die Dilatationsschranke wenig von 1 abweicht. Wir begnügen uns mit der Darlegung des Verfahrens an einem Spezialfall. Technisch gesehen sind die Überlegungen sehr ähnlich wie bei der Herleitung des Gauß-Thomsonschen Prinzips minimaler Energie zur Charakterisierung der Kapazität eines Kondensators. Sie liefern zunächst (vgl. Satz 1) eine andere Extremalcharakterisierung der Extremalabbildungen und in weiterer Ausgestaltung auch Beziehungen zwischen den Extremalabbildungen zu verschiedenen Dilatationsschranken (Satz 2 und 3). Das Verfahren wurde zunächst für den Fall von Abbildungen der Vollebene in [6] angewandt. Es wird hier nun gleich für den Fall der Abbildungen von Gebieten G dargestellt, deren Rand C aus endlich vielen disjunkten geschlossenen (zunächst analytischen) Jordankurven besteht.

II. G liege im folgenden in der z -Ebene und enthalte $z = \infty$ im Innern. Die Funktion $p(z)$, die unten als Dilatationsschranke auftreten wird, erfülle nebst

$$0 < m \leqq p(z) \leqq M < \infty$$

der Einfachheit halber einschlägige, die Anwendung des Gaußschen Integralsatzes unmittelbar ermögliche Glattheitsvoraussetzungen. Sei etwa $p(z)$ in G mit hölderstetigen partiellen Ableitungen 1. Ordnung versehen,

dabei in einem Streifen um jede Randkomponente jeweils konstant. In Umgebung von $z = \infty$ sei $p(z) \equiv 1$. Mit \mathfrak{R} bezeichnen wir einen grossen Kreis $|z| = R$, mit G_R den ins Innere von \mathfrak{R} fallenden Teil von G . n sei die Innennormale von \mathfrak{R} und die Aussennormale bei C .

III. Mit $g_\theta(z)$ bezeichnen wir nun diejenige schlichte quasikonforme Abbildung von G , für die $e^{-i\theta} g_\theta(z)$ die Differentialgleichung

$$(1) \quad f_{\bar{z}} = v \cdot \bar{f}_z \quad \text{mit} \quad v = \frac{p - 1}{p + 1}$$

erfüllt, die in $z = \infty$ durch

$$(2) \quad g_\theta(z) = z + \frac{a_1 \theta}{z} + \dots$$

hydrodynamisch normiert ist, und die Bildrandkomponenten erzeugt, die Strecken der Neigung θ zur positiv reellen Achse darstellen. Entsprechend sei $\mathfrak{G}_\theta(z)$ die in $z = \infty$ durch

$$(3) \quad \mathfrak{G}_\theta(z) = z + \frac{\mathfrak{A}_1 \theta}{z} + \dots$$

normierte konforme Abbildung von G , bei der Strecken der Neigung θ entstehen.

Wir setzen nun

$$(4) \quad \varphi_0(z) = \operatorname{Re}[e^{-i\theta} \mathfrak{G}_\theta(z)],$$

$$(5) \quad \Phi^*(z) = \operatorname{Re}[e^{-i\theta} g_\theta(z)] = \varphi_0(z) + \varphi^*(z).$$

$\Phi^*(z)$ erfüllt dann die Differentialgleichung

$$(6) \quad \operatorname{div}\left(\frac{1}{p} \operatorname{grad} \Phi^*\right) = 0.$$

Daneben betrachten wir alle Vergleichsfunktionen $\Phi(z) \equiv \varphi_0(z) + \varphi(z)$, die (ebenso wie $\Phi^*(z)$) in \bar{G} hölderstetige partielle Ableitungen zweiter Ordnung besitzen, in Umgebung von $z = \infty$ harmonisch sind mit $\varphi(\infty) = 0$ und

$$(7) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \text{ auf } C$$

erfüllen.

IV. Bei der Herleitung unserer Extremaleigenschaft von $g_\theta(z)$ gehen wir ähnlich wie in [6] aus von

$$\begin{aligned}
 (8) \quad & - \int_{\Re + c} \frac{1}{p} \left(\Phi^* \frac{\partial \Phi^*}{\partial n} - \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) ds + \iint_{G_R} \Phi \operatorname{div} \left(\frac{1}{p} \operatorname{grad} \Phi \right) dx dy \\
 & = \iint_{G_R} \frac{1}{p} (\operatorname{grad}^2 \Phi^* - \operatorname{grad}^2 \Phi) dx dy \\
 & = \iint_{G_R} \frac{1}{p} (\operatorname{grad} \Phi^* - \operatorname{grad} \Phi)^2 dx dy \\
 & - 2 \iint_{G_R} \frac{1}{p} \operatorname{grad} \Phi (\operatorname{grad} \Phi - \operatorname{grad} \Phi^*) dx dy \\
 & \geq - 2 \iint_{G_R} \frac{1}{p} \operatorname{grad} \Phi (\operatorname{grad} \Phi - \operatorname{grad} \Phi^*) dx dy \\
 & = 2 \int_{\Re + c} \frac{1}{p} \Phi \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} - \frac{\partial \Phi^*}{\partial n} \right) ds + 2 \iint_{G_R} \Phi \operatorname{div} \left(\frac{1}{p} \operatorname{grad} \Phi \right) dx dy,
 \end{aligned}$$

was sich wegen (7) zu

$$\begin{aligned}
 (9) \quad 0 & \geq \int_{\Re} (\Phi - \Phi^*) \frac{\partial (\Phi - \Phi^*)}{\partial n} ds + \int_{\Re} \left(\Phi^* \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial \Phi^*}{\partial n} \right) ds \\
 & + \iint_{G_R} \Phi \operatorname{div} \left(\frac{1}{p} \operatorname{grad} \Phi \right) dx dy
 \end{aligned}$$

umschreiben lässt. Hier strebt für $R \rightarrow \infty$ das erste Integral nach 0. Da auch

$$(10) \quad \int_{\Re} \left(\varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial n} \right) ds = - \iint_{G_R} (\varphi^* \Delta \varphi - \varphi \Delta \varphi^*) dx dy$$

nach 0 strebt und sich das zweite Integral in (9) analog zu (10) umschreiben lässt, folgt durch Subtraktion von (9) und (10)

$$\begin{aligned}
 (11) \quad & \iint_G \Phi \operatorname{div} \left(\frac{1}{p} \operatorname{grad} \Phi \right) dx dy - \iint_G \varphi_0 \Delta \Phi dx dy \\
 & \leq - \iint_G \varphi_0 \Delta \Phi^* dx dy.
 \end{aligned}$$

Hier ist die rechte Seite weiter gleich

$$\begin{aligned}
 (12) \quad - \iint_G \varphi_0 \Delta \Phi^* dx dy &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathfrak{R}} \left(\varphi_0 \frac{\partial \Phi^*}{\partial n} - \Phi^* \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} \right) ds \\
 &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathfrak{R}} [\Phi^* d(\Im e^{-i\theta} \mathfrak{G}_\theta) + (\Im e^{-i\theta} g_\theta) d\varphi_0] \\
 &= \lim_{R \rightarrow \infty} \Im e^{-2i\theta} \int_{\mathfrak{R}} g_\theta d\mathfrak{G}_\theta = 2\pi \Re e^{-2i\theta} (a_{1\theta} - \mathfrak{A}_{1\theta}).
 \end{aligned}$$

Das erste Integral auf der linken Seite von (11) lässt sich wegen

$$\begin{aligned}
 \iint_{G_R} \varphi_0 \operatorname{div} \left(\frac{1}{p} \operatorname{grad} \varphi \right) dx dy - \iint_{G_R} \varphi \operatorname{div} \left(\frac{1}{p} \operatorname{grad} \varphi_0 \right) dx dy \\
 = \int_{\mathfrak{R}} \frac{1}{p} \left[\varphi \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} - \varphi_0 \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right] ds,
 \end{aligned}$$

$$\iint_{G_R} \varphi_0 \Delta \varphi dx dy = \int_{\mathfrak{R}} \left[\varphi \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} - \varphi_0 \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right] ds$$

folgendermassen umtransformieren:

$$\begin{aligned}
 (13) \quad \iint_{G_R} \Phi \operatorname{div} \left(\frac{1}{p} \operatorname{grad} \Phi \right) dx dy \\
 &= \iint_{G_R} \varphi \operatorname{div} \left(\frac{1}{p} \operatorname{grad} \varphi \right) dx dy + \iint_{G_R} \varphi_0 \operatorname{div} \left(\frac{1}{p} \operatorname{grad} \varphi_0 \right) dx dy \\
 &\quad + \iint_{G_R} \varphi \operatorname{div} \left(\frac{1}{p} \operatorname{grad} \varphi_0 \right) dx dy + \iint_{G_R} \varphi_0 \operatorname{div} \left(\frac{1}{p} \operatorname{grad} \varphi \right) dx dy \\
 &= \iint_{G_R} \varphi \operatorname{div} \left(\frac{1}{p} \operatorname{grad} \varphi \right) dx dy + 2 \iint_{G_R} \varphi \operatorname{div} \left(\frac{1}{p} \operatorname{grad} \varphi_0 \right) dx dy \\
 &\quad + \int_{\mathfrak{R}} \left[\varphi \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} - \varphi_0 \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right] ds - \iint_{G_R} \frac{1}{p} \operatorname{grad}^2 \varphi_0 dx dy \\
 &\quad - \int_{\mathfrak{R}} \varphi_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} ds
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \iint_{G_R} \varphi \operatorname{div} \left(\frac{1}{p} \operatorname{grad} \varphi \right) dx dy + 2 \iint_{G_R} \varphi \left(\operatorname{grad} \frac{1}{p} \right) (\operatorname{grad} \varphi_0) dx dy \\
 &+ \iint_{G_R} \varphi_0 \Delta \Phi dx dy - \iint_{G_R} \frac{1}{p} \operatorname{grad}^2 \varphi_0 dx dy + \iint_{G_R} \operatorname{grad}^2 \varphi_0 dx dy.
 \end{aligned}$$

Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen.

SATZ 1. Für alle in \bar{G} mit hölderstetigen partiellen Ableitungen zweiter Ordnung versehenen Funktionen φ , die in Umgebung von $z = \infty$ harmonisch sind mit $\varphi(\infty) = 0$ und die längs C verschwindende Normalableitung besitzen, gilt

$$\begin{aligned}
 (14) \quad \iint_G \left[\left(1 - \frac{1}{p} \right) \operatorname{grad}^2 (\varphi_0 + \varphi) - \operatorname{grad}^2 \varphi \right] dx dy \\
 \leq 2\pi \operatorname{Re} e^{-2i\theta} (a_{1\theta} - \mathfrak{A}_{1\theta}).
 \end{aligned}$$

Das Gleichheitszeichen steht genau dann, wenn $\varphi \equiv \varphi^*$.

V. Die oben angestellten Überlegungen lassen sich noch in anderer Richtung weitertreiben.

Es sei jetzt noch eine zweite Funktion $p(z)$ gegeben, die die gleichen Voraussetzungen, wie oben unter II. für $p(z)$ angegeben, erfüllt. Dazu sei $g_\theta(z)$ diejenige Abbildung, die analog zu $g_\theta(z)$ definiert wird, wobei jetzt nur $p(z)$ durch $p(z)$ zu ersetzen ist.

$$(15) \quad g_\theta(z) = z + \frac{\alpha_{1\theta}}{z} + \dots$$

sei die zugehörige Entwicklung in $z = \infty$.

Statt (4) und (5) setzen wir jetzt

$$(16) \quad \varphi_0(z) = \operatorname{Re} [e^{-i\theta} g_\theta(z)],$$

$$(17) \quad \Phi^*(z) = \operatorname{Re} [e^{-i\theta} g_\theta(z)] = \varphi_0(z) + \varphi^*(z).$$

Ferner sei jetzt $\Phi(z) \equiv \varphi_0(z)$, d.h. $\varphi(z) \equiv 0$. Dann gelten (6) bis (9) unverändert. Statt (13) erhalten wir jetzt

$$\begin{aligned}
 (18) \quad \iint_{G_R} \Phi \operatorname{div} \left(\frac{1}{p} \operatorname{grad} \Phi \right) dx dy &= - \iint_{G_R} \frac{1}{p} \operatorname{grad}^2 \Phi dx dy \\
 &- \int_{\mathcal{R}} \frac{1}{p} \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= - \iint_{G_R} \frac{1}{p} \operatorname{grad}^2 \Phi dx dy + \iint_{G_R} \frac{1}{p} \operatorname{grad}^2 \Phi dx dy \\
 &= \iint_G \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p} \right) \operatorname{grad}^2 \Phi dx dy.
 \end{aligned}$$

(12) ist zu ersetzen durch

$$\begin{aligned}
 (19) \quad &\int_{\Re} \left(\Phi^* \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial \Phi^*}{\partial n} \right) ds \\
 &= - \int_{\Re} \Phi^* d(\Im e^{-i\theta} g_\theta) + (\Im e^{-i\theta} g_\theta) d\Phi \\
 &= - \Im e^{-2i\theta} \int_{\Re} g_\theta d g_\theta = - 2\pi \Re e^{-2i\theta} (a_{1\theta} - \alpha_{1\theta}).
 \end{aligned}$$

Statt (14) landen wir damit bei der Ungleichung

$$(20) \quad \iint_G \left(1 - \frac{p}{p} \right) J_g dx dy \leq 2\pi \Re e^{-2i\theta} (a_{1\theta} - \alpha_{1\theta}).$$

Denn für die Funktionaldeterminanten unserer Abbildungen gilt

$$(21) \quad J_g = |g_{\theta z}|^2 - |g_{\theta \bar{z}}|^2 = \frac{1}{p} \operatorname{grad}^2 \Phi$$

nebst einer entsprechenden Relation für J_g .

VI. Zu V. analoge Rechnungen lassen sich durchführen, wenn man statt (16), (17) ansetzt

$$(22) \quad \varphi_0(z) = \Re [e^{-i\theta} i g_\theta(z/i)],$$

$$(23) \quad \Phi^*(z) = \Re [e^{-i\theta} i g_\theta(z/i)].$$

Dabei gilt in Umgebung von $z = \infty$

$$(24) \quad i g_\theta(z/i) = z - \frac{\alpha_{1\theta}}{z} + \dots, \quad i g_\theta(z/i) = z - \frac{a_{1\theta}}{z} + \dots.$$

Statt (7) gilt jetzt auf dem Rand $\Phi = \text{const}$ und $\Phi^* = \text{const}$, was wieder zum Verschwinden der Randintegrale Anlass gibt. Denn es ist z.B.

$$\int p(z/i) \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds = \Phi \cdot \int p(z/i) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds = \Phi \cdot \int d \Im (e^{-i\theta} i g_\theta(z/i)) = 0.$$

Bei anderen Randintegralen wird noch $p \equiv \text{const}$, $\mathfrak{p} \equiv \text{const}$ in Umgebung des Randes benutzt. Damit gesellt sich noch zu (20) die Ungleichung

$$(25) \quad \iint_G \left(1 - \frac{p}{\mathfrak{p}}\right) J_g dx dy \leq 2\pi \Re e^{-2i\theta} (\mathfrak{a}_{1\theta} - a_{1\theta}).$$

Vertauschen wir noch in (20) und (25) die Rollen von g_θ und \mathfrak{g}_θ , so erhalten wir zusammenfassend den

SATZ 2. Für die Entwicklungskoeffizienten $\mathfrak{a}_{1\theta}$ bzw. $a_{1\theta}$ der Funktionen $\mathfrak{g}_\theta(z)$ bzw. $g_\theta(z)$ gilt

$$(26) \quad \begin{aligned} \iint_G \left(1 - \frac{\mathfrak{p}}{p}\right) J_g dx dy &\leq 2\pi \Re e^{-2i\theta} (a_{1\theta} - \mathfrak{a}_{1\theta}) \\ &\leq \iint_G \left(\frac{p}{\mathfrak{p}} - 1\right) J_g dx dy, \end{aligned}$$

$$(27) \quad \begin{aligned} \iint_G \left(1 - \frac{\mathfrak{p}}{p}\right) J_g dx dy &\leq 2\pi \Re e^{-2i\theta} (a_{1\theta} - \mathfrak{a}_{1\theta}) \\ &\leq \iint_G \left(\frac{p}{\mathfrak{p}} - 1\right) J_g dx dy. \end{aligned}$$

Das Gleichheitszeichen steht genau für $\mathfrak{p}(z) \equiv p(z)$.

VII. Man kann die Ungleichungen von Satz 2 noch in eine andere Form bringen. Wir beschränken uns dabei im folgenden auf den Fall, es ist in ganz G durchweg $p(z) \geq 1$ und $\mathfrak{p}(z) \geq 1$, so dass wir die in [1], [7] betrachtete Extremeigenschaft der Funktionen $\mathfrak{g}_\theta(z)$ bzw. $g_\theta(z)$ ins Spiel bringen können. Wir benutzen zunächst die Identität (vgl. [1])

$$(28) \quad \mathfrak{g}_\theta(z) = e^{i\theta} \cdot [\mathfrak{g}_0(z) \cdot \cos \theta - i \mathfrak{g}_{\pi/2}(z) \cdot \sin \theta]$$

und die entsprechende für $g_\theta(z)$. Diese Identität zieht u.a.

$$(29) \quad \mathfrak{a}_{1\theta} = \mathfrak{m} + \mathfrak{r} e^{2i\theta}, \quad a_{1\theta} = m + r e^{2i\theta}$$

mit gewissen komplexen \mathfrak{m} , m und (nach [1]) positiven \mathfrak{r} , r nach sich. Ferner setzen wir noch

$$(30) \quad \mathfrak{M}(z) = \frac{1}{2} [\mathfrak{g}_0(z) - \mathfrak{g}_{\pi/2}(z)], \quad \mathfrak{N}(z) = \frac{1}{2} [\mathfrak{g}_0(z) + \mathfrak{g}_{\pi/2}(z)],$$

$$(31) \quad M(z) = \frac{1}{2} [g_0(z) - g_{\pi/2}(z)], \quad N(z) = \frac{1}{2} [g_0(z) + g_{\pi/2}(z)].$$

Drückt man nun umgekehrt $g_\theta(z)$ und $g_\theta(z)$ durch diese neuen Funktionen aus, erhält man z.B. aus der linken Seite von (26)

$$(32) \quad 2\pi \cdot [r - \mathfrak{r} + \operatorname{Re} e^{-2i\theta} (m - \mathfrak{m})] \\ \geq \iint_G \left(1 - \frac{\mathfrak{p}}{p}\right) [|M_z|^2 - |M_{\bar{z}}|^2 + |\mathfrak{N}_z|^2 - |\mathfrak{N}_{\bar{z}}|^2] dx dy \\ + 2 \operatorname{Re} e^{-2i\theta} \iint_G \left(1 - \frac{\mathfrak{p}}{p}\right) [\overline{M_z} \mathfrak{N}_z - \overline{M_{\bar{z}}} \mathfrak{N}_{\bar{z}}] dx dy.$$

Entsprechend lassen sich die anderen Ungleichungen von Satz 2 umschreiben. Da diese jeweils für alle θ gelten, erhalten wir den

SATZ 3. *Der Kreis mit Radius r und Mittelpunkt m enthält im Innern vollständig den Kreis mit Radius (falls (33) positiv ist)*

$$(33) \quad \mathfrak{r} + \frac{1}{2\pi} \iint_G \left(1 - \frac{\mathfrak{p}}{p}\right) [|M_z|^2 - |M_{\bar{z}}|^2 + |\mathfrak{N}_z|^2 - |\mathfrak{N}_{\bar{z}}|^2] dx dy$$

und Mittelpunkt

$$(34) \quad \mathfrak{m} + \frac{1}{\pi} \iint_G \left(1 - \frac{\mathfrak{p}}{p}\right) [\overline{M_z} \mathfrak{N}_z - \overline{M_{\bar{z}}} \mathfrak{N}_{\bar{z}}] dx dy$$

und ist seinerseits vollständig im Innern des Kreises mit Radius

$$(35) \quad \mathfrak{r} + \frac{1}{2\pi} \iint_G \left(\frac{p}{\mathfrak{p}} - 1\right) [|M_z|^2 - |M_{\bar{z}}|^2 + |\mathfrak{N}_z|^2 - |\mathfrak{N}_{\bar{z}}|^2] dx dy > 0$$

und Mittelpunkt

$$(36) \quad \mathfrak{m} + \frac{1}{\pi} \iint_G \left(\frac{p}{\mathfrak{p}} - 1\right) [\overline{M_z} N_z - \overline{M_{\bar{z}}} N_{\bar{z}}] dx dy$$

enthalten, es sei denn, es ist $p(z) \equiv \mathfrak{p}(z)$. Diese Behauptung bleibt richtig, wenn man überall M und m sowie \mathfrak{N} und N vertauscht.

Diese Formeln lassen sich wegen

$$(37) \quad \begin{aligned} \mathfrak{M}_{\bar{z}} &= \frac{p-1}{p+1} \overline{\mathfrak{N}_z}, \quad \mathfrak{N}_{\bar{z}} = \frac{p-1}{p+1} \overline{\mathfrak{M}_z}, \\ M_{\bar{z}} &= \frac{p-1}{p+1} \overline{N_z}, \quad N_{\bar{z}} = \frac{p-1}{p+1} \overline{M_z} \end{aligned}$$

noch etwas anders schreiben.

VIII. Ist in G eine Funktion $p(z) \geq 1$ der oben betrachteten Art definiert, ist ferner $g(z)$ eine schlichte quasikonforme Abbildung von G , deren Dilatation stets $\leq p(z)$ ist, wobei in $z = \infty$ hydrodynamische Normierung

$$(38) \quad g(z) = z + \frac{a_1}{z} + \dots$$

vorliegt, dann ist nach [1] der genaue Wertebereich der Koeffizienten a_1 eine abgeschlossene Kreisscheibe, deren Mittelpunkt und Radius gerade m und r sind. Damit wird durch Satz 3 also abgeschätzt, wie sich die Lage dieser Kreisscheibe beim Übergang von einer Dilatationsschranke $p(z)$ zu einer anderen $p(z)$ höchstens ändern kann.

Besonders einfach wird die Aussage von Satz 3 natürlich, wenn $p(z) \equiv 1$ ist. Wir erhalten dann für Mittelpunkt m und Radius r der Kreisscheibe, die den Wertebereich der Koeffizienten a_1 bei den hydrodynamisch normierten Abbildungen

$$(39) \quad g(z) = z + \frac{a_1}{z} + \dots$$

zur Dilatationsschrankenfunktion $p(z)$ angibt, z.B. das folgende Ergebnis.

FOLGERUNG 1. *Der Kreis mit Mittelpunkt m und Radius r enthält im Innern vollständig den Kreis mit Radius und Mittelpunkt*

$$(40) \quad r + \frac{1}{2\pi} \iint_G \left(1 - \frac{1}{p}\right) [|\mathfrak{M}'|^2 + |\mathfrak{N}'|^2] dx dy$$

und

$$m + \frac{1}{\pi} \iint_G \left(1 - \frac{1}{p}\right) \overline{\mathfrak{M}'} \mathfrak{N}' dx dy .$$

Dabei sind jetzt \mathfrak{M} und \mathfrak{N} gemäss (30) aus den konformen Parallelschlitzabbildungen zu bilden. m und r sind Mittelpunkt und Radius dieser Koeffizientenkreisscheibe im rein konformen Falle.

Diese Folgerung schätzt also ab, wie sich beim Übergang von den konformen Abbildungen zu den quasikonformen mit der Dilatations schranke $p(z)$ diese Kreisscheibe vergrössert. Im Spezialfalle, es treten keine Randkomponenten auf, so dass G die Vollebene ist, fallen wir auf einen Satz in [6] zurück. Verwandte Abschätzungen traten schon in [3], [5] auf.

IX. Besonders einfach werden die bewiesenen Ungleichungen dann, wenn wir den Fall betrachten, es ist G die Vollebene und es wird definiert $p(z) \equiv Q \geq 1$, $p(z) \equiv Q \geq 1$ im Innern endlich vieler sich untereinander nicht treffender oder umschlingender fixierter geschlossener analytischer Jordankurven, $p(z) \equiv p(z) \equiv 1$ im Äusseren. (Diese Situation ist formal zwar wegen der Unstetigkeit von $p(z)$ bzw. $p(z)$ nicht nach II. zugelassen, lässt sich aber mühelos durch einen Grenzübergang mit erfassen). Ist der Inhalt des Innern der Bilder dieser Jordankurven bei $g_\theta(z)$ bzw. $g_\theta(z)$ gleich $I(Q)$ bzw. $I(Q)$, dann ergibt sich also aus Satz 2 die

FOLGERUNG 2. Es gilt für $Q > Q$

$$(41) \quad I(Q)/Q \leq 2\pi \operatorname{Re} e^{-2i\theta} \frac{a_{1\theta} - a_{1\theta}}{Q - Q} \leq I(Q)/Q,$$

$$(42) \quad I(Q)/Q \leq 2\pi \operatorname{Re} e^{-2i\theta} \frac{a_{1\theta} - a_{1\theta}}{Q - Q} \leq I(Q)/Q.$$

Die Grösse $\operatorname{Re} e^{-2i\theta} a_{1\theta}$ ist für $Q \geq 1$ von Q reell-analytisch abhängig und erfüllt

$$(43) \quad 2\pi \cdot \frac{d}{dQ} \operatorname{Re} e^{-2i\theta} a_{1\theta} = I(Q)/Q,$$

so dass auch $I(Q)$ reell-analytisch von Q abhängt. Ferner ist $Q \cdot I(Q)$ eine eigentlich monoton steigende, $I(Q)/Q$ eine eigentlich monoton fallende Funktion von Q , wobei das Integral

$$(44) \quad \int_1^\infty \frac{I(Q)}{Q} dQ$$

konvergiert.

Die Analytizität des genannten Realteils ergibt sich dabei aus [4], (43) und die Monotonieaussagen anschliessend aus (41) und (42). (44) folgt dann noch aus (43).

Es ergibt sich übrigens noch aus der linken Seite von (41) für $Q \rightarrow \infty$

$$(45) \quad I(\mathfrak{Q}) \leq 2\pi \operatorname{Re} e^{-2i\theta} (a_{1\theta} - \mathfrak{a}_{1\theta}),$$

wobei a_1 dann den Koeffizienten im konformen Grenzfalle bezeichnet. Danach gilt also

$$(46) \quad I(\mathfrak{Q}) \rightarrow 0 \text{ für } \mathfrak{Q} \rightarrow \infty.$$

Es sei noch bemerkt, dass sich für die Grösse $I(Q)$ selbst in Abhängigkeit von Q keine einheitliche Monotonieaussage treffen lässt. Das sieht man schon an dem Beispiel, es gibt nur eine Jordankurve (vgl. Anfang von IX.) als Sprunglinie von $p(z)$ und diese ist eine Ellipse. Dann ergibt sich (z.B. nach [2]), dass $I(Q)$ zunächst monoton steigend ist und erst von einer gewissen Stelle ab monoton fallend. Wir können dabei $\Theta = 0$ annehmen; die grosse Achse der Ellipse sei parallel zur imaginären Achse.

Übrigens lässt sich der linken Seite von (41) und der Monotonie von $Q \cdot I(Q)$ noch entnehmen, dass

$$(47) \quad 2\pi \operatorname{Re} e^{-2i\theta} a_{1\theta} + I(Q)$$

eigentlich monoton steigend als Funktion von Q .

X. Man kann analog zu dem oben betrachteten und sich um den Koeffizienten a_1 rankenden Extremalproblem auch zu den anderen in [6] studierten Extremalproblemen Übertragungen für den Fall herleiten, es treten Randkomponenten auf. So lässt sich z.B. wie in [6] durch Bildung einer zwei-blättrigen Überlagerung aus Satz 1 und 2 eine Abschätzung des Wertebereichs des Bildpunktes eines fixierten Punktes z_1 herleiten.

Durch Verfeinerung der obigen Betrachtungen lässt sich übrigens die oben gemachte Voraussetzung $p(z) \equiv 1$ in Umgebung von $z = \infty$ und damit im Zusammenhang die hydrodynamische Normierung der Abbildungen durch eine schwächere der Art wie in [3] ersetzen.

XI. Die Ungleichungen (26), (27) gestatten es, Extremalprobleme der Form $\operatorname{Re} e^{-2i\theta} a_1 \rightarrow \max$ unter gewissen Nebenbedingungen an $p(z)$ in Klassen von Lösungen von (1) der Form $e^{-i\theta} g_\theta(z)$ zu studieren.

SCHRIFTTUM

- [1] KÜHNAU, R. Wertannahmeprobleme bei quasikonformen Abbildungen mit ortsabhängiger Dilatationsbeschränkung. *Math. Nachr.* 40 (1969), 1-11.
- [2] —— Bemerkungen zu den Grunskyschen Gebieten. *Math. Nachr.* 44 (1970), 285-293.
- [3] —— Zur Methode der Randintegration bei quasikonformen Abbildungen. *Ann. Polon. Math.* 31 (1976), 269-289.
- [4] —— Eine Integralgleichung in der Theorie der quasikonformen Abbildungen. *Math. Nachr.* 76 (1977), 139-152.
- [5] —— Die Spanne von Gebieten bei quasikonformen Abbildungen. *Arch. Rat. Mech. Anal.* 65 (1977), 299-303.
- [6] —— Verzerrungsaussagen bei quasikonformen Abbildungen mit ortsabhängiger Dilatationsbeschränkung und ein Extremalprinzip der Elektrostatik in inhomogenen Medien. *Comm. Math. Helv.* 53 (1978), 408-428.
- [7] RENELET, H. Modifizierung und Erweiterung einer Schifferschen Variationsmethode für quasikonforme Abbildungen. *Math. Nachr.* 55 (1973), 353-379.

(Reçu le 15 mai 1978)

Reiner Kühnau

Mathematik
Martin-Luther-Universität
Halle an der Saale
DDR

vide-leer-empty