

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 24 (1978)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** REMARKS ON THE UNIVERSAL TEICHMÜLLER SPACE  
**Autor:** Gehring, F. W.  
**Kapitel:** 4. OUTLINE OF THE PROOF OF THEOREM 5  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-49698>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 23.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

#### 4. OUTLINE OF THE PROOF OF THEOREM 5

Fix  $a \in \left(0, \frac{1}{8\pi}\right)$  and let  $D = \overline{\mathbb{C}} - \gamma$ , where

$$\gamma = \{z = \pm i e^{(-a+i)t} : 0 \leq t < \infty\} \cup \{0\}.$$

Then  $D$  is a simply connected domain which contains the disjoint  $e^{2\pi a}$ -spirals

$$\alpha = \{z = e^{(-a+i)t} : 0 < t < \infty\}, \quad \beta = \{z : -z \in \alpha\}.$$

Next let  $f$  denote any conformal mapping of  $D$  which fixes the points  $1, -1, \infty$ . To complete the proof of Theorem 5 it is sufficient to show that there exists a positive constant  $\delta = \delta(a)$  such that  $f(D)$  is not a Jordan domain whenever  $\|S_f\|_D \leq \delta$ . This is done in three steps.

First using Lemma 1 and a normal family type argument, we can prove that there exists a  $\delta_1 = \delta_1(a) > 0$  with the following property. If  $\|S_f\|_D \leq \delta_1$ , then  $f(\alpha)$  and  $f(\beta)$  are  $b$ -spirals from 1 onto  $z_2$  and from  $-1$  onto  $w_2$ , respectively, where  $b \in (1, 2)$ . The points  $z_2, w_2$  are the values which  $f(z)$  approaches as  $z \rightarrow 0$  from opposite sides of  $\partial D = \gamma$ .

Next theorems on quasiconformal mappings due to Ahlfors [1] and Teichmüller [8] imply the existence of a positive constant  $\delta_2 = \delta_2(a) \leq \delta_1$  such that  $|z_2| \leq \frac{1}{5}$  and  $|w_2| \leq \frac{1}{5}$  whenever  $\|S_f\|_D \leq \delta_2$ .

Finally set  $\delta = \delta_2$ . If  $\|S_f\|_D \leq \delta$ , then

$$|z_2 - w_2| \leq \frac{2}{5} < \frac{4}{5b} \leq \frac{1}{b} \min(|1 - z_2|, |-1 - w_2|),$$

Lemma 2 implies that  $z_2 = w_2$  and hence  $f(D)$  is not a Jordan domain. A complete proof for Theorem 5 is given in [5].

#### 5. CONCLUDING REMARKS

We have obtained Theorems 1 and 3 from the stronger conclusion in Theorem 5. We conclude by stating a result for multiply connected domains which implies Theorems 2 and 4.

Given a function  $\varphi$  defined in an arbitrary proper subdomain  $D$  of  $\mathbb{C}$ , we introduce the norm