

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 24 (1978)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: DILATATIONEN VON ABELSCHEN GRUPPEN
Autor: Suter, S. / Zagier, D.
Kapitel: III. DILATATIONSGRUPPEN VON ENDLICHEN ABELSCHEN p -GRUPPEN
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-49695>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 19.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

(oder auch nur das Bild von δ_2 in $(\mathbf{Z}/f\mathbf{Z})^*$) trivial ist, in $\tilde{\Delta}(e, f)$. Die Bemerkungen 1.—3. gelten ebenso für nicht-homogene Dilatationen, sodaß wir die Bestimmung von $\Delta(G)$ für beliebige abelsche Gruppen auf die Bestimmung von $\tilde{\Delta}(p^r, p^s)$ zurückgeführt haben.

Wir müssen also nur noch die Gruppen $\tilde{\Delta}_0(p^r, p^s)$ und $\tilde{\Delta}(p^r, p^s)$ berechnen, was im nächsten Kapitel geschieht.

III. DILATATIONSGRUPPEN VON ENDLICHEN ABELSCHEN p -GRUPPEN

Seien p eine Primzahl und $r \geq s \geq 0$ ganze Zahlen. In diesem Kapitel wollen wir die Gruppen $\tilde{\Delta}_0(p^r, p^s)$ und $\tilde{\Delta}(p^r, p^s)$ berechnen. Da diese Gruppen Untergruppen von $\Delta_0(\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z})$ bzw. von $\Delta(\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z})$ sind, behandeln wir zunächst den Spezialfall $s = 0$.

SATZ 6. a) Die Dilatationsgruppe der zyklischen Gruppe $G = \mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z}$ ist zum r -fachen Kranzprodukt der symmetrischen Gruppe \mathfrak{S}_p isomorph,

$$(12) \quad \Delta(\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z}) \cong \underbrace{\mathfrak{S}_p \wr \dots \wr \mathfrak{S}_p}_{r \text{ mal}},$$

wo das Kranzprodukt von einer Gruppe H mit \mathfrak{S}_p durch die Operation von \mathfrak{S}_p als Permutationsgruppe von p Elementen gegeben wird, d.h. $H \wr \mathfrak{S}_p = \underbrace{(H \times \dots \times H)}_{p \text{ mal}} \rtimes \mathfrak{S}_p$. Insbesondere gilt

$$(13) \quad |\Delta(\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z})| = p^{1+p+p^2+\dots+p^{r-1}} = p^{(p^r-1)/(p-1)}.$$

b) Die homogene Dilatationsgruppe von $\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z}$ wird gegeben durch

$$(14) \quad \begin{aligned} \Delta_0(\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z}) \cong & \mathfrak{S}_{p-1} \times (\mathfrak{S}_p \wr \mathfrak{S}_{p-1}) \times \dots \\ & \times \underbrace{(\mathfrak{S}_p \wr \dots \wr \mathfrak{S}_p \wr \mathfrak{S}_{p-1})}_{r-1 \text{ mal}} \end{aligned}$$

und hat die Ordnung $p^{(p^r-1)/(p-1)}/p^r$.

Beweis. Wir werden $\Delta(\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z})$ induktiv bestimmen, indem wir die Gruppe $\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z}$ in Nebenklassen nach der Untergruppe $p\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z}$ zerlegen. Nach Satz 4 c) mit $G = \mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z}$, $N = p\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z}$ und $Q = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ gibt es einen injektiven Homomorphismus

$$(15) \quad \varphi: \Delta(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}) \hookrightarrow \Delta(N) \wr \Delta(Q) = \Delta(\mathbb{Z}/p^{r-1}\mathbb{Z})^p \rtimes \mathfrak{S}_p,$$

wobei wir benutzt haben, daß $\Delta(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \cong \mathfrak{S}_p$. Die Abbildung φ wird wie folgt explizit beschrieben: Wir schreiben $G = \bigcup_{j=0}^{p-1} L_j$ mit $L_j = \{x \in \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z} \mid$

$x \equiv j \pmod{p}\} \ (j=0, 1, \dots, p-1)$. Jedes L_j können wir vermöge $x \mapsto \frac{x-j}{p}$

$\pmod{p^{r-1}}$ mit $\mathbb{Z}/p^{r-1}\mathbb{Z}$ identifizieren. Jede Dilatation $\delta \in \Delta(G)$ permutiert einerseits die Restklassen L_j und induziert somit eine Permutation δ' von $\{0, 1, \dots, p-1\}$, andererseits induziert δ vermöge der Identifikation der L_j mit $\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$ Dilatationen $\delta_0, \dots, \delta_{p-1} \in \Delta(N)$, die durch die Formel

$$(16) \quad \delta(j+ap) = \delta'(j) + \delta_j(a) \cdot p \quad (j \in \{0, \dots, p-1\}, a \in N)$$

definiert werden. Die Abbildung φ wird dann durch $\delta \mapsto ((\delta_0, \dots, \delta_{p-1}), \delta')$ gegeben.

Wir wollen zeigen, daß φ surjektiv ist. Seien $\delta' \in \mathfrak{S}_p$ und p Dilatationen $\delta_0, \dots, \delta_{p-1}$ von $\mathbb{Z}/p^{r-1}\mathbb{Z}$ gegeben. Dann wird durch (16) eine bijektive Abbildung δ von G auf sich definiert. Wir müssen zeigen, daß δ die Gleichung (5) für alle $x, y \in G$ erfüllt. Sind x und y modulo p kongruent, so gibt es ein $j \in \{0, \dots, p-1\}$ mit $x = j + pa$, $y = j + pb$ und, wegen der dilatativen Eigenschaft von δ_j , eine zu p teilerfremde Zahl $n \in \mathbb{Z}$ mit $\delta_j(a) - \delta_j(b) = n(a-b)$. Dann ist

$$\delta(x) - \delta(y) = [\delta'(j) + p\delta_j(a)] - [\delta'(j) + p\delta_j(b)] = n(x-y).$$

Sind x und y verschieden modulo p , so sind $\delta(x)$ und $\delta(y)$ auch modulo p verschieden (da δ' eineindeutig ist) und die Bedingung (5) ist automatisch erfüllt. Damit ist gezeigt, daß $\Delta(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})$ zu $\Delta(\mathbb{Z}/p^{r-1}\mathbb{Z}) \wr \mathfrak{S}_p$ isomorph ist, woraus (12) durch Induktion über r folgt.

b) Sei $\delta \in \Delta(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})$ mit $\varphi(\delta) = ((\delta_0, \dots, \delta_{p-1}), \delta')$. Wegen (16) ist δ genau dann homogen, wenn δ' und δ_0 homogen sind. Wir können dann δ' als Permutation von $\{1, \dots, p-1\}$ auffassen und erhalten durch $\varphi(\delta) \mapsto \delta_0 \times ((\delta_1, \dots, \delta_{p-1}), \delta')$ den Isomorphismus

$$\begin{aligned} \Delta_0(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}) &\xrightarrow{\cong} \Delta_0(\mathbb{Z}/p^{r-1}\mathbb{Z}) \times [\Delta(\mathbb{Z}/p^{r-1}\mathbb{Z}) \wr \mathfrak{S}_{p-1}] \\ &\cong \Delta_0(\mathbb{Z}/p^{r-1}\mathbb{Z}) \times \underbrace{(\mathfrak{S}_p \wr \dots \wr \mathfrak{S}_p \wr \mathfrak{S}_{p-1})}_{r-1 \text{ mal}}, \end{aligned}$$

woraus (14) durch Induktion über r folgt.

Der Fall $s > 0$ sieht ganz anders aus. Ein Grund hierfür ist, daß die definierende Eigenschaft dieser Gruppen, nämlich

$$(17) \quad \forall x, y \in \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z} \exists u \in \mathbb{Z} \quad \text{mit} \quad \delta(x) - \delta(y) = (1 + p^s u)(x - y)$$

die Bedingung (5) impliziert, sodaß die Abbildungen δ , die (17) genügen, automatisch bijektive Dilatationen sind.

SATZ 7. Sei p eine Primzahl, $r \geq 1$. Dann gilt

$$(18) \quad \tilde{\Delta}(p^r, p) \cong \underbrace{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \wr \dots \wr \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}_{r \text{ mal}}$$

$$(19) \quad \tilde{\Delta}_0(p^r, p) \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \times \dots \\ \times \underbrace{(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \wr \dots \wr \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})}_{r-1 \text{ mal}})^{p-1},$$

wobei das Kranzprodukt von einer Gruppe H mit $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ durch die Operation von $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ als zyklische Permutationsgruppe auf p Elementen gegeben wird, d.h. $H \wr \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \underbrace{H \times \dots \times H}_{p \text{ mal}} \rtimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Insbesondere gilt

$$(20) \quad |\tilde{\Delta}(p^r, p)| = p^{1+p+p^2+\dots+p^{r-1}}$$

$$(21) \quad |\tilde{\Delta}_0(p^r, p)| = p^{1+p+p^2+\dots+p^{r-1}-r}.$$

Beweis. Gleichung (18) ist für $r = 1$ trivial, da $\tilde{\Delta}(p, p)$ nur aus Translationen besteht. Sei also $r \geq 2$ und $\psi: \tilde{\Delta}(p^r, p) \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ die Abbildung, die δ auf den Wert von $\delta(x) - x \pmod{p}$ schickt, wo $x \in \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$; wegen (17) (mit $s=1$) ist dieser Wert von x unabhängig. Falls eine Dilatation δ in $\text{Ker } \psi$ liegt, bildet δ jede Nebenklasse $L_j = j + p\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$ auf sich ab, sodaß wir durch die Formel

$$(22) \quad \delta(j + ap) = j + \delta_j(a)p \quad (j \in \{0, \dots, p-1\}, u \in \mathbb{Z}/p^{r-1}\mathbb{Z})$$

p Dilatationen $\delta_j \in \Delta(\mathbb{Z}/p^{r-1}\mathbb{Z})$ erhalten. Jedes δ_j liegt in $\tilde{\Delta}(p^{r-1}, p)$, denn für $a, b \in \mathbb{Z}/p^{r-1}\mathbb{Z}$ gibt es wegen (17) eine Zahl $u \in \mathbb{Z}$ mit

$$(23) \quad p(\delta_j(a) - \delta_j(b)) = \delta(j + ap) - \delta(j + bp) \equiv \\ (1 + up)(ap - bp) \pmod{p^r}.$$

Wir haben also eine injektive Abbildung

$$(24) \quad \text{Ker } \psi \rightarrow \tilde{\Delta}(p^{r-1}, p)^p, \quad \delta \mapsto (\delta_0, \dots, \delta_{p-1})$$

konstruiert; wir behaupten, daß sie ein Isomorphismus ist. Wenn nämlich $\delta_0, \dots, \delta_{p-1} \in \tilde{\Delta}(p^{r-1}, p)$ vorgegeben sind und δ durch (22) definiert wird, dann gilt erst $\delta(x) \equiv x \pmod{p}$ ($\forall x \in \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$) und somit $\delta(x) - \delta(y) \equiv x - y \pmod{p}$, was für $x \not\equiv y \pmod{p}$ schon ausreicht, um die Existenz einer Zahl u wie in (17) zu zeigen; falls x und y kongruent modulo p sind, schreiben wir $x = j + ap$, $y = j + bp$ und erhalten wie in (23) die Existenz von u aus der entsprechenden Eigenschaft von δ_j . Somit haben wir eine exakte Folge

$$1 \rightarrow \tilde{\Delta}(p^{r-1}, p)^p \rightarrow \tilde{\Delta}(p^r, p) \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rightarrow 1.$$

Man rechnet leicht nach, daß ψ spaltet und daß $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ auf $\tilde{\Delta}(p^{r-1}, p)^p$ durch zyklische Permutation operiert, also

$$\tilde{\Delta}(p^r, p) \cong \tilde{\Delta}(p^{r-1}, p) \wr \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}.$$

Gleichung (18) folgt hieraus durch Induktion über r .

Die Gruppe $\tilde{\Delta}_0(p^r, p)$ ist eine Untergruppe von $\text{Ker } \psi$ und entspricht unter dem Isomorphismus (24) offensichtlich der Gruppe $\tilde{\Delta}_0(p^{r-1}, p) \times \tilde{\Delta}(p^{r-1}, p)^{p-1}$, sodaß Gleichung (19) unter Benutzung von (18) durch nochmalige Induktion über r folgt.

SATZ 8. Sei p eine Primzahl, $r \geq s \geq 1$. Dann gibt es eine exakte Folge

$$(25) \quad 1 \rightarrow \underbrace{((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \wr \dots \wr (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}))^p}_{r-s \text{ mal}} \rightarrow \tilde{\Delta}(p^r, p^s) \rightarrow \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z} \rightarrow 1$$

und einen Isomorphismus

$$(26) \quad \begin{aligned} & \tilde{\Delta}_0(p^r, p^s) \\ & \cong ((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \times \dots \times \underbrace{(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \wr \dots \wr \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})}_{r-s \text{ mal}})^{p-1}, \end{aligned}$$

insbesondere gilt

$$(27) \quad |\tilde{\Delta}(p^r, p^s)| = p^{p+p^2+\dots+p^{r-s}+s},$$

$$(28) \quad |\tilde{\Delta}_0(p^r, p^s)| = p^{p+p^2+\dots+p^{r-s}-r+s}.$$

Beweis. Der Fall $r = s$ ist trivial. Sei also $r > s$. Analog zu Satz 7 definieren wir eine surjektive Abbildung $\psi: \tilde{\Delta}(p^r, p^s) \rightarrow \mathbf{Z}/p^s\mathbf{Z}$, indem wir eine Dilatation δ auf den (nach (17) von x unabhängigen) Wert von $\delta(x) - x \pmod{p^s}$ abbilden. Für $\delta \in \text{Ker } \psi$ setzen wir

$$(29) \quad \bar{\delta}(x) = x + \frac{\delta(x) - x}{p^{s-1}} \in \mathbf{Z}/p^{r-s+1}\mathbf{Z}.$$

Dann ist (17) zu der Gleichung

$$(30) \quad \begin{aligned} \forall x, y \in \mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z} \exists u \in \mathbf{Z} \text{ mit } \bar{\delta}(x) - \bar{\delta}(y) \\ = (1 + pu)(x - y) \pmod{p^{r-s+1}} \end{aligned}$$

äquivalent. Insbesondere ist $\bar{\delta}(x) = \bar{\delta}(y)$ falls $x \equiv y \pmod{p^{r-s+1}}$, sodaß $\bar{\delta}$ als Abbildung von $\mathbf{Z}/p^{r-s+1}\mathbf{Z}$ in sich selbst betrachtet werden kann, und nach (30) ist diese Abbildung sogar eine Dilatation aus $\tilde{\Delta}(p^{r-s+1}, p)$. Wegen $\delta(x) \equiv x \pmod{p^s}$ und (29) gilt $\bar{\delta}(x) \equiv x \pmod{p}$, d.h. $\bar{\delta}$ liegt im Kern der im Beweis von Satz 7 konstruierten Abbildung $\tilde{\Delta}(p^{r-s+1}, p) \rightarrow \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. Umgekehrt definiert jedes $\bar{\delta} \in \tilde{\Delta}(p^{r-s+1}, p)$ mit $\bar{\delta}(x) \equiv x \pmod{p}$ durch

$$\delta(x) = x + p^{s-1}(\bar{\delta}(x) - x)$$

eine Dilatation aus $\text{Ker } \psi$, also

$$\begin{aligned} \text{Ker } \psi &\cong \text{Ker}(\tilde{\Delta}(p^{r-s+1}, p) \rightarrow \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \underset{(24)}{\cong} \Delta(p^{r-s}, p)^p \\ &\underset{(18)}{\cong} \underbrace{((\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \wr \dots \wr (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}))^p}_{r-s+1 \text{ mal}}. \end{aligned}$$

Da $\tilde{\Delta}_0(p^r, p^s) \subset \text{Ker } \psi$ unter $\delta \mapsto \bar{\delta}$ den homogenen Dilatationen von $\tilde{\Delta}(p^{r-s+1}, p)$ entspricht, ist (26) eine unmittelbare Folge von (19).

Die Gruppenerweiterung (25) können wir leicht beschreiben: Die Gruppe $\tilde{\Delta}(p^r, p^s)$ ist das Produkt des Normalteilers $\text{Ker } \psi$ und der zu $\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z}$ isomorphen Gruppe der Translationen, welche durch Reduktion $\pmod{p^s}$ surjektiv auf die Gruppe $\mathbf{Z}/p^s\mathbf{Z}$ in (25) abgebildet werden; die Translationen $x \mapsto x + p^s a$, die bei dieser Projektion auf 0 gehen, operieren auf $\text{Ker } \psi \cong \tilde{\Delta}(p^{r-s}, p)^p$ durch die entsprechenden Translationen $x \mapsto x + a$ in $\tilde{\Delta}(p^{r-s}, p)$.

Wir behandeln nun den Fall unendlichen Exponents. Wir bezeichnen mit \mathbf{Z}/p^∞ die Gruppe $\varinjlim \mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z}$ (also die p -Komponente von \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) und mit \mathbf{Z}_p^* die Gruppe der p -adischen Einheiten.

SATZ 9. *Sei G eine abelsche p -Gruppe unendlichen Exponents. Falls $G \cong \mathbf{Z}/p^\infty$, so ist*

$$\Delta_0(G) \cong \mathfrak{S}_{p-1} \times (\mathfrak{S}_p \wr \mathfrak{S}_{p-1}) \times (\mathfrak{S}_p \wr \mathfrak{S}_p \wr \mathfrak{S}_{p-1}) \times \dots$$

Falls $G \cong \mathbf{Z}/p^\infty \oplus G'$ mit $G' \neq \{0\}$ eine Gruppe von endlichem Exponent p^s , so ist $\Delta_0(G)$ isomorph einer nur von p^s abhängigen Gruppe $\Delta_0(p^\infty, p^s)$ mit

$$1 \rightarrow (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \times (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \wr \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \times \dots)^{p-1} \rightarrow \Delta_0(p^\infty, p^s) \rightarrow (\mathbf{Z}/p^s\mathbf{Z})^* \rightarrow 1.$$

In allen anderen Fällen ist $\Delta_0(G) \cong \mathbf{Z}_p^$.*

Beweis. Aus der Theorie der abelschen Gruppen (siehe etwa das Buch von Kaplansky) folgt, daß G entweder einen direkten Summanden \mathbf{Z}/p^∞ hat oder reduziert ist (d.h. keine dividierbare Gruppe enthält), wobei G im letzteren Fall zyklische Summanden beliebig hoher Ordnung hat. Es gibt also drei Fälle zu unterscheiden:

- i) $G = \mathbf{Z}/p^\infty \oplus G'$ mit $\exp(G') = p^s < \infty$,
- ii) $G = \mathbf{Z}/p^\infty \oplus G'$ mit $\exp(G') = \infty$,
- iii) G reduziert, $\exp(G) = \infty$.

Nach Bemerkung 1 zu Satz 5 ist $\Delta_0(G) \cong \varprojlim \Delta_0(G[p^t])$. Für t genügend groß ist die Gruppe $G[p^t]$ im Falle i) zu $\mathbf{Z}/p^t\mathbf{Z} \oplus G'$ isomorph und in den Fällen ii) und iii) zu $\mathbf{Z}/p^t\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/p^t\mathbf{Z} \oplus G''$ mit $\exp(G'') \leq p^t$. Die Behauptung des Satzes folgt jetzt aus den Sätzen 5, 6 und 8.

Mit diesem Satz haben wir die Berechnung der Dilatationsgruppen aller abelschen p -Gruppen und damit aller abelschen Gruppen abgeschlossen.

(Reçu le 4 août 1977)

S. Suter
D. Zagier

Mathematisches Institut
der Universität Bonn (BRD)