

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 24 (1978)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** DILATATIONEN VON ABELSCHEN GRUPPEN  
**Autor:** Suter, S. / Zagier, D.  
**Kapitel:** I. KONGRUENZKLASSENGEOMETRIEN UND GRUPPENGOMETRIEN  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-49695>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 27.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## I. KONGRUENZKLASSENGEOMETRIEN UND GRUPPENGOMETRIEN

Eine *Geometrie* ist eine Menge  $G$  zusammen mit gewissen ausgezeichneten Untermengen von  $G$ , den *Unterräumen*, von denen (mindestens) verlangt wird, daß Punkte aus  $G$  sowie beliebige Durchschnitte von Unterräumen Unterräume sind. Zu jeder Untermenge  $X \subset G$  gibt es dann einen kleinsten  $X$  umfassenden Unterraum  $[X] \subset G$ , den man den *von  $X$  erzeugten Unterraum* oder die *Hülle von  $X$*  nennt. Man benutzt meistens die gewohnte geometrische Terminologie und bezeichnet als *Gerade* (bzw.  *$n$ -dimensionalen Unterraum*) einen von zwei (bzw. von minimal  $n + 1$ ) verschiedenen Punkten erzeugten Unterraum. Meistens hat man auch irgendeinen Begriff von *Parallelität* zwischen Unterräumen, insbesondere also zwischen Geraden; eine *Dilatation* der Geometrie ist dann eine Abbildung  $\delta: G \rightarrow G$ , welche Geraden in dazu parallele Geraden überführt. Diese Begriffe gewinnen dadurch an Interesse, daß man vielfach einer algebraischen Struktur eine Geometrie zuordnen und Beziehungen zwischen algebraischen Eigenschaften auf der einen Seite und geometrischen Eigenschaften — etwa die Gültigkeit der Sätze von Pappus und Desargues — auf der anderen Seite herstellen kann. Dabei spielen die Dilatationen oft eine Schlüsselrolle.

Das bekannteste Beispiel (Artin, *Geometric Algebra*) wird gegeben durch die affine Ebene  $k^2$  über einem (Schief-) Körper  $k$ . Diese Geometrie erfüllt folgende Axiome:

1. Durch je zwei Punkte geht genau eine Gerade.
2. Es gibt genau eine Parallele zu einer gegebenen Geraden durch einen gegebenen Punkt (wobei „parallel“ hier definiert wird als „identisch oder disjunkt“).
3. Es gibt drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.
4. Es gelten die beiden Sätze von Desargues.

Wenn umgekehrt eine Geometrie diese vier Axiome erfüllt, so bilden die fixpunktfreien Dilatationen der Geometrie zusammen mit der Identitätsabbildung eine abelsche Gruppe  $T$ , die richtungserhaltenden<sup>1)</sup> Endomorphismen von  $T$  bilden einen Schiefkörper  $k$  und die gegebene Geometrie

<sup>1)</sup> Zwei Elemente  $\delta_1, \delta_2 \in T$  haben dieselbe Richtung, falls für jeden Punkt  $P$  die drei Punkte  $P, \delta_1(P), \delta_2(P)$  auf einer Geraden liegen.

ist zu der affinen Ebene  $k^2$  isomorph. Außerdem gilt in der Geometrie genau dann der Satz von Pappus, wenn der Körper  $k$  kommutativ ist.

Sei jetzt  $(n_i)_{i \in I}$  eine Familie von natürlichen Zahlen. Eine *allgemeine Algebra vom Typ  $(n_i)_{i \in I}$*  ist eine Menge  $A$  zusammen mit einer Familie von Operationen  $f_i: A^{n_i} \rightarrow A$  ( $i \in I$ ). Zum Beispiel ist eine Gruppe eine Algebra vom Typ  $(0, 1, 2)$  mit  $f_0 = e$ ,  $f_1(x) = x^{-1}$  und  $f_2(x, y) = x \cdot y$ . Homomorphismen, Unteralgebren und Produkte von allgemeinen Algebren eines festen Typs werden in der üblichen Weise definiert. Eine *primitive Klasse* ist eine Klasse von Algebren eines festen Typs, welche geschlossen ist unter Produkten, Unteralgebren und homomorphen Bildern. Beispiele sind die Klassen der Ringe, der Gruppen, der Körper, der Vektorräume über einem gegebenen Körper usw. Nach einem Satz von G. Birkhoff ist jede primitive Klasse durch Gleichungen gegeben. Zum Beispiel gilt für die Klasse der Gruppen die Gleichung  $f_2(x, f_1(x)) = f_0$  und entsprechende Gleichungen für die anderen Gruppenaxiome. Eine *Kongruenzrelation* auf einer allgemeinen Algebra  $A$  ist eine Äquivalenzrelation  $\sim$ , die mit den Operationen verträglich ist, d.h.

$$x_1 \sim x'_1, \dots, x_{n_i} \sim x'_{n_i} \Rightarrow f_i(x_1, \dots, x_{n_i}) \sim f_i(x'_1, \dots, x'_{n_i}) \quad (\forall i).$$

Wenn  $\phi$  ein Homomorphismus von  $A$  in eine andere Algebra ist, so wird durch  $x \sim y \Leftrightarrow \phi(x) = \phi(y)$  eine Kongruenzrelation auf  $A$  erklärt, und umgekehrt hat jede Kongruenzrelation diese Gestalt. Die Äquivalenzklassen von  $A$  bezüglich einer Kongruenzrelation heißen *Kongruenzklassen*. Man kann dann der Algebra  $A$  eine Geometrie  $\Gamma(A)$  zuordnen, deren zugrundeliegende Punktmenge  $A$  ist und deren Unterräume die Kongruenzklassen in  $A$  (bezüglich aller Kongruenzrelationen) sind. Der von Elementen  $x_1, \dots, x_i, \dots$  erzeugte Unterraum bzw. die Hülle  $[X]$  von  $X = \{x_1, \dots, x_i, \dots\}$  ist somit die kleinste Kongruenzklasse, die  $X$  umfaßt. Diese Definition ist sinnvoll, da der Durchschnitt von Kongruenzklassen wieder eine Kongruenzklasse ist. Seien  $R, S$  zwei Unterräume von  $A$ . Wir nennen  $R$  zu  $S$  *parallel*, falls  $S$  eine Kongruenzklasse ist bezüglich der kleinsten Kongruenzrelation, für die  $R$  eine Klasse ist (dies ist i.a. keine Äquivalenzrelation). Eine *Dilatation* ist eine Abbildung  $\delta: A \rightarrow A$ , die mit allen Kongruenzrelationen auf  $A$  verträglich ist (d.h.  $x \sim y \Rightarrow \delta(x) \sim \delta(y)$ ). Falls  $\delta$  bijektiv ist und  $\delta^{-1}$  auch eine Dilatation, so überführt  $\delta$  Unterräume in parallele Unterräume. (Für die Weiterentwicklung dieser Ideen siehe R. Wille, *Kongruenzklassengeometrien*, Springer Lecture Notes No. 113, wo auch ein Algorithmus entwickelt wird, der es gestattet, für Algebren einer primitiven Klasse geometrische Sachverhalte in algebraische zu übersetzen.)

Sei nun  $G$  eine Gruppe,  $\Gamma(G)$  die Geometrie von  $G$ . Die Kongruenzklassen von  $G$  und damit die Unterräume von  $\Gamma(G)$  sind dann die Normalteiler von  $G$  und deren Nebenklassen. Die Hülle  $[X]$  einer Untermenge  $X = \{x_1, \dots, x_n\} \subset G$  wird gegeben durch

$$[X] = \{r_1 x_1 + \dots + r_n x_n \mid r_1, \dots, r_n \in \mathbf{Z}, \sum_{i=1}^n r_i = 1\},$$

falls  $G$  abelsch ist, und, wie man leicht zeigt, durch

$$[X] = \{x_1^{r_1} \dots x_n^{r_n} g \mid r_1, \dots, r_n \in \mathbf{Z}, \sum_{i=1}^n r_i = 1, g \in U\}$$

im allgemeinen, wo  $U$  die von allen Kommutatoren  $[x, x_i x_j^{-1}]$  ( $x \in X, 1 \leq i < j \leq k$ ) erzeugte Untergruppe von  $G$  bezeichnet. In  $\Gamma(G)$  sind zwei Unterräume genau dann parallel, wenn sie Nebenklassen desselben Normalteilers sind; insbesondere ist Parallelität für Gruppengeometrien eine Äquivalenzrelation. Die Gruppengeometrie  $\Gamma(G)$  sieht aber i.a. sehr anders aus als die gewohnte affine oder projektive Geometrie: z.B. hat Wille (*Kongruenzklassengeometrien*, S. 36) gezeigt, daß  $\Gamma(G)$  nur dann eindeutige Verbindungsgeraden hat (d.h. genau eine Gerade durch je zwei Punkte), wenn  $G$  entweder einfach oder elementar-abelsch ist. Dieser Satz illustriert gleichzeitig, wie stark die Wechselwirkung zwischen den geometrischen Eigenschaften von  $\Gamma(G)$  und der algebraischen Struktur von  $G$  ist. Allerdings wird eine Gruppe nicht vollständig durch ihre Geometrie bestimmt, da z.B. die zwei nicht-isomorphen einfachen Gruppen  $\mathfrak{A}_8$  und  $\text{PSL}_3(\mathbf{F}_4)$  der Ordnung 20160 isomorphe Geometrien haben. Um weiter zu verdeutlichen, wie Gruppengeometrien aussehen können, machen wir hier einige Bemerkungen über die Dimension  $\dim(G)$  einer Gruppe  $G$  aufgefaßt als Unterraum in  $\Gamma(G)$ . Per definitionem ist  $\dim(G)$  die kleinste Zahl  $n$ , so daß es eine  $n$ -elementige Untermenge von  $G$  gibt, die in keinem echten Normalteiler von  $G$  enthalten ist. Insbesondere ist  $\dim(G) = 1$  genau dann, wenn  $G$  das normale Erzeugnis eines einzigen Elements ist, d.h. wenn  $\bigcup_{N \triangleleft G} N \neq G$ .

Wenn  $N$  ein Normalteiler von  $G$  ist, so gilt immer  $\dim(G/N) \leq \dim(G)$ , aber nicht immer  $\dim(N) \leq \dim(G)$  (Beispiel: die „Gerade“  $A_4$  enthält die „Ebene“  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \otimes \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$  als Normalteiler). Indem man  $G$  durch die Frattini-Gruppe  $\Phi(G)$  (= Durchschnitt aller maximalen Normalteiler) teilt, was die Dimension offenbar nicht ändert, kann man zeigen, daß

$\dim(G) = \dim(G_{ab}) = \max \{k \mid \exists \text{ Primzahl } p \text{ und eine Surjektion } G \rightarrow (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^k\}$ , außer im Falle  $G_{ab} = \{1\}$ ,  $G \neq \{1\}$ , wo  $\dim(G) = 1$ ,  $\dim(G_{ab}) = 0$  ist.