Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 24 (1978)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SOUS-GROUPES DÉRIVÉS DES GROUPES DE NŒUDS
Autor: Hausmann, J. C. / Kervaire, M.
Kapitel: §1. Présentations dynamiques
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-49694

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 18.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

SOUS-GROUPES DÉRIVÉS DES GROUPES DE NŒUDS [1]

par J. C. HAUSMANN et M. KERVAIRE

Rappelons la caractérisation algébrique des groupes de nœuds en grandes dimensions. Soient π un groupe et d un entier supérieur ou égal à 3. D'après [K], il existe un nœud différentiable $k: S^d \to S^{d+2}$ avec

$$\pi \cong \pi_1 \left(S^{d+2} - k\,(S^d)\right)$$

si et seulement si

(1) π est de présentation finie;

(2) π est clôture normale d'un de ses éléments;

(3) $H_1\,(\pi) = \mathbf{Z}$ et $H_2\,(\pi) = 0$.

Dans cette note nous étudions les groupes qui possèdent ces propriétés et nous donnons une caractérisation de leur groupe dérivé $[\pi, \pi]$.

La principale difficulté est d'élucider la condition de finitude imposée à $G = [\pi, \pi]$ par l'existence d'une présentation finie de π.

Ce problème est résolu à l'aide de la notion de *présentation dynamique* que nous exposons dans un contexte plus général.

Le problème correspondant pour les groupes d'enlacements reste ouvert.

§ 1. PRÉSENTATIONS DYNAMIQUES

Soient H un groupe, I un ensemble d'indices et $L = L_{I,H}$ le groupe libre sur l'ensemble $\{ x_{i,a} \}$ avec $i \in I$, $a \in H$.

Le groupe H opère sur L par translation du deuxième indice des générateurs. On notera cette action $S : H \to \mathrm{Aut}\,(L)$, i.e.

$$S_a\,(x_{i,b}) = x_{i,ab}\,,$$

$i \in I$, a, $b \in H$.

Définition. Soit H un groupe. Une *présentation H-dynamique* de G est une présentation de G de la forme

$$G = < x_{i,a} : R_{j,b} >, i \in I, j \in J, a, b \in H\,,$$

[1]) Présenté au Colloque de Topologie et d'Algèbre, Zurich, avril 1977.

telle que

$$S_a(R_{j,b}) = R_{j,ab}\,.$$

On dira que la présentation dynamique est *finie* si les ensembles d'indices I et J sont finis.

Remarque. Une présentation H-dynamique d'un groupe G fournit une action de H sur G induite par l'action de H sur le groupe libre $L_{I,H}$.

Supposons maintenant que H soit de présentation finie. On a alors:

THÉORÈME 1. *Soit G un groupe muni d'une action du groupe H. Le produit semi-direct $\pi = G \tilde{\times} H$ est de présentation finie si et seulement si G possède une présentation H-dynamique finie qui induit l'action donnée de H sur G.*

Preuve. Supposons d'abord π de présentation finie. On voit facilement que l'on peut trouver une présentation de π de la forme $\pi = < x_1, ..., x_m, z_1, ..., z_n : R_1, ..., R_r >$ telle que $x_1, ..., x_m$ représentent des éléments de G et $z_1, ..., z_n$ des éléments de H.

Soient X le groupe libre sur $x_1, ..., x_m$ et $p: X * H \to \pi$ la projection évidente. Soit L le groupe libre sur l'ensemble $\{ x_{i,a} \}$, $i = 1, ..., m$ et $a \in H$. On définit un homomorphisme $\lambda: L \to X * H$ par $\lambda(x_{i,a}) = a x_i a^{-1}$.

Il est clair que $p\lambda(L) \subset G$. En fait, λ est un isomorphisme de L sur $p^{-1}(G) \subset X * H$. En effet, $p^{-1}(G)$ coincide avec le noyau de la projection $X * H \to H$. Donc tout élément de $p^{-1}(G)$ s'écrit de façon unique sous la forme

$$w = a_1 A_1 a_2 A_2 \dots a_N A_N (a_1 a_2 \dots a_N)^{-1}$$

avec $A_1, ..., A_N \in X - \{ e_X \}$, $a_1, ..., a_N \in H$ et $a_2, ..., a_N \neq e_H$.

On va définir un inverse $\mu: p^{-1}(G) \to L$ de λ. Sur X, μ est donnée par $\mu(x_i) = x_{i,e}$, où $e = e_H$ est l'élément neutre de H. Pour $w \in p^{-1}(G)$ quelconque, on écrit w sous la forme canonique ci-dessus, et on définit

$$\mu(w) = S_{a_1}(\mu A_1) \cdot S_{a_1 a_2}(\mu A_2) \cdot \dots . S_{a_1 \dots a_N}(\mu A_N)\,.$$

Comme $\lambda(S_a x) = a\lambda(x)\, a^{-1}$ pour tout $x \in L$, on vérifie immédiatement que $\lambda\mu = 1$. De même $\mu\lambda = 1$.

Il en résulte en particulier que $p\lambda: L \to G$ est une surjection et que les opérations de H sur L induisent la conjugaison dans π, donc l'action donnée de H sur G.

Soient maintenant Z le groupe libre sur $z_1, ..., z_n$ et $q: X * Z \to X * H$ la projection naturelle surjective. On a $q(R_j) \in p^{-1}(G)$ pour $j = 1, ..., r$.

Donc il existe un unique élément $R_{j,e} = \mu q(R_j) \in L$ tel que $\lambda(R_{j,e}) = q(R_j)$. On pose ensuite $R_{j,b} = S_b(R_{j,e})$, de sorte que $S_a(R_{j,b}) = R_{j,ab}$.

Assertion: G admet la présentation H-dynamique

$$G = < x_{i,a} : R_{j,b} >, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, r$$

avec projection de présentation $p\lambda$.

Il s'agit de démontrer que Ker $p\lambda$ est exactement la clôture normale des éléments $R_{j,b}$, $j = 1, \ldots, r$, $b \in H$.

D'abord

$$p\lambda(R_{j,b}) = p\lambda S_b R_{j,e} = p\left(b\lambda(R_{j.e})\, b^{-1}\right) = p\left(bq(R_j)\, b^{-1}\right) = 1\,.$$

Ensuite, si $w \in \operatorname{Ker} p\lambda$, il existe un élément $R \in X * Z$ tel que l'on ait $\lambda w = qR$, puisque $q: X * Z \to X * H$ est surjective. La relation $p\lambda w = pqR = 1$ montre que R représente 1 dans π, donc R est un produit de conjugués des éléments R_j, $j = 1, \ldots, r$ et de leurs inverses. Donc $\lambda w = qR$ est un produit de conjugués des $q(R_j) = \lambda(R_{j,e})$ et de leurs inverses. Pour chaque terme $U\lambda(R_{j,e}^{\pm 1})\, U^{-1}$, on peut écrire $U = a_0 A_1 a_1 \ldots A_N a_N$ avec $A_i \in X$ et $a_i \in H$. En utilisant

$$A(\lambda R)\, A^{-1} = \lambda\left(\lambda A \,.\, R \,.\, (\mu A)^{-1}\right) \quad \text{pour} \quad A \in X,\ R \in L,$$

et

$$a(\lambda R)\, a^{-1} = \lambda(S_a R) \qquad \text{pour} \quad a \in H,\ R \in L,$$

et l'injectivité de λ, on voit que w est un produit de conjugués des $R_{j,a}^{\varepsilon}$, $j = 1, \ldots, r$, $a \in H$, $\in = \pm 1$.

Inversement, si G possède une présentation H-dynamique finie, soit $G = < x_{i,a} : R_{j,b} >$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, s$, qui induit l'action donnée de H sur G, et si l'on se donne une présentation finie de H, soit $H = < z_1, \ldots, z_n : R_{s+1}, \ldots, R_r >$, on obtient pour $\pi = G \tilde{\times} H$ la présentation

$$\pi = < x_{i,a}, z_1, \ldots, z_n : R_{j,b}, R_{s+1}, \ldots, R_r, z_j x_{i,a} z_j^{-1} = x_{i,a_j a} >$$

où a_j est l'image de $z_j \in Z$ par la projection de présentation $Z \to H$.

Soit $\Psi : H \to Z$ un système de représentants des éléments de H avec $\Psi(e) = 1$. Les relations $x_{i,a} = \Psi(a)\, x_{i,e}\, \Psi(a)^{-1}$ qui résultent des relations ci-dessus permettent de se limiter aux seuls générateurs $x_1, \ldots, x_m$, $z_1, \ldots, z_n$ avec $x_i = x_{i,e}$.

Soient alors $R_{j,b}^*$ les relateurs obtenus à partir de $R_{j,b}$ par substitution de $\Psi(a)\, x_i\, \Psi(a)^{-1}$ pour $x_{i,a}$. Les relations $S_a(R_{j,b}) = R_{j,ab}$ entraînent que $R_{j,b}^* = z R_{j,e}^* z^{-1}$ mod Ker $\{Z \to H\}$, où $z \in Z$ représente $b \in H$.

(On notera que les relations $ux_iu^{-1} = vx_iv^{-1}$, si u et $v \in Z$ représentent le même élément de H, sont évidemment conséquences de $R_{s+1}, \ldots, R_r$ qui définissent H.) Il en résulte que π admet la présentation $\pi = < x_1, \ldots, x_m, z_1, \ldots, z_n : R_1, \ldots, R_r >$, où $R_i = R^*_{i,e}$ pour $i = 1, \ldots, s$.

§ 2. Groupes de nœuds

Il est maintenant facile de caractériser le sous-groupe dérivé d'un groupe de nœud.

On note C le groupe cyclique infini de générateur z.

Théorème 2. *Un groupe G est sous-groupe dérivé d'un groupe de nœud,* i.e. *d'un groupe satisfaisant aux conditions* (1), (2), (3) *de l'introduction, si et seulement si G admet une présentation C-dynamique finie avec automorphisme induit $\sigma : G \to G$ tel que*

(I) *G est engendré par les éléments de la forme $x \,.\, \sigma(x^{-1}), x \in G$;*

(II) *$H_2(G)$ est un $\mathbf{Z}\,C$-module parfait,* i.e. *$\sigma_* - 1 : H_2G \to H_2G$ est surjective.*

Note. La condition (II) s'exprime homologiquement par $H_0(C, H_2G) = 0$. C'est sous cette forme que nous l'utiliserons.

Preuve. Soient π un groupe de nœud et $z \in \pi$ un élément dont la clôture normale est π tout entier. On a $\pi = G \tilde{\times} C$, où $G = [\pi, \pi]$ et C est infini cyclique engendré par z.

Comme π est de présentation finie, il résulte du théorème 1 que G possède une présentation C-dynamique finie avec automorphisme $\sigma : G \to G$ donné par $\sigma(x) = zxz^{-1}$.

On va voir que σ satisfait aux conditions (I) et (II) du théorème 2.

(I) Si $g \in G$, g est un produit de conjugués de z et z^{-1}, i.e. $g = \Pi_i x_i z^{\varepsilon_i} x_i^{-1}$, $x_i \in \pi$, avec $\Sigma_i \varepsilon_i = 0$. Comme $x_i z x_i^{-1} = x_i z^a z z^{-a} x_i^{-1}$, on peut supposer $x_i \in G$ pour tout i. Or, avec $x \in G$, on a

$$xzx^{-1} = xzx^{-1}z^{-1}z = x \,.\, \sigma(x^{-1}) \,.\, z \,.$$

Il en résulte facilement que tout élément de G s'écrit comme produit d'éléments de la forme $x \,.\, \sigma(x^{-1})$ et de leurs inverses.