

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 24 (1978)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SOLUTIONS PRESQUE-PÉRIODIQUES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ABSTRAITES  
**Autor:** Zaidman, S.  
**Kapitel:** Introduction  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-49693>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 27.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# SOLUTIONS PRESQUE-PÉRIODIQUES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ABSTRAITES

par S. ZAIDMAN <sup>1</sup>

## INTRODUCTION

La théorie des fonctions presque-périodiques se développe avec vigueur depuis une cinquantaine d'années environ. Il faut toutefois citer comme pionniers de la théorie les mathématiciens P. Bohl et E. Esclangon qui, au début du xx<sup>e</sup> siècle, ont donné une première généralisation des fonctions périodiques en définissant la classe des fonctions « quasi-périodiques ». La théorie telle qu'on la connaît aujourd'hui a été créée par H. Bohr et ensuite développée par plusieurs auteurs; elle a trouvé de nombreuses applications (voir [1], [5] pour des références plus complètes).

En 1933, S. Bochner [2] a défini et étudié les fonctions presque-périodiques à valeurs dans un espace de Banach; cette extension trouvait ensuite une application dans l'étude des solutions de l'équation des ondes [3]; dans une période plus récente d'autres applications des fonctions presque-périodiques vectorielles ont été mises en évidence (voir [1], [5], [10], [11], [12], [13]) et nous voulons, dans cet exposé, présenter certains de ces nouveaux développements qui, à notre avis méritent une exposition détaillée. Toutefois, il ne s'agit pas ici du tout d'un exposé exhaustif des nouveaux résultats dans ce domaine, mais juste d'une présentation partielle d'un nombre de théorèmes choisis parmi d'autres, pour permettre au lecteur d'entrer dans cette nouvelle branche de l'analyse harmonique.

Pour terminer cette (courte) introduction, nous rappelons premièrement la définition des fonctions presque-périodiques à valeurs dans un espace de Banach  $\mathcal{X}$ ; il s'agit de fonctions (fortement) continues  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{X}$ , jouissant de la propriété suivante:

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $L(\varepsilon) > 0$  de façon que dans tout intervalle réel  $[a, a+L]$  on trouve au moins un nombre  $\tau$ , tel que

$$\sup_{t \in \mathbf{R}} \|f(t+\tau) - f(t)\|_{\mathcal{X}} < \varepsilon.$$

---

<sup>1</sup>) Ce travail est subventionné par le Conseil National de Recherches du Canada.

Nous étudions la presque-périodicité des fonctions  $u(t)$  de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathcal{X}$ , vérifiant une équation différentielle

$$u'(t) = Au(t) + f(t)$$

$A$  étant un opérateur linéaire de domaine  $\mathcal{D}(A)$  dans l'espace  $\mathcal{X}$ , alors que  $f(t)$  est identiquement nulle ou bien est une fonction presque-périodique. En fait, une partie des résultats est valable dans les espaces de Hilbert seulement, en particulier les théorèmes du §4 concernant les solutions faibles minimales.

Un autre groupe de résultats (Th. 2.1, 2.2, 3.1, 3.2) porte sur l'équivalence entre les solutions à trajectoire bornée ou relativement compacte et les solutions presque-périodiques; l'origine de ce genre de théorème remonte à Bohr-Neugebauer et Bochner (consulter la Bibliographie, par exemple [1], [5], [12], [13]).

### § 1. SOLUTION PRESQUE-PÉRIODIQUES DE L'ÉQUATION $\left(\frac{d}{dt} - A\right)u = 0$

Au début nous allons considérer le cas de l'équation

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t)$$

dans un espace de Banach  $\mathcal{X}$ ,  $A$  étant un opérateur linéaire continu de  $\mathcal{X}$  en lui-même, et  $x(t)$  une fonction continûment différentiable, de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathcal{X}$ . Dans ce cas, toute solution s'écrit sous la forme

$$x(t) = U(t)x(0),$$

$U(t)$  étant défini comme exponentielle <sup>1)</sup>:

$$U(t) = e^{At} = I + \frac{tA}{1!} + \frac{t^2 A^2}{2!} + \dots + \frac{t^n A^n}{n!} + \dots$$

Nous posons la définition suivante (selon [6]):

*Définition 1.1.* L'espace de Banach  $\mathcal{X}$  est parfait si les conditions

$x(t)$  bornée de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathcal{X}$

$x'(t)$  presque périodique de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathcal{X}$

entraînent

$x(t)$  est presque-périodique de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathcal{X}$ .

<sup>1)</sup> Voir [7], [8], [9].