Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 24 (1978)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SOLUTIONS PRESQUE-PÉRIODIQUES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ABSTRAITES

Autor: Zaidman, S.

Kapitel: Introduction

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-49693

SOLUTIONS PRESQUE-PÉRIODIQUES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ABSTRAITES

par S. ZAIDMAN [1]

INTRODUCTION

La théorie des fonctions presque-périodiques se développe avec vigueur depuis une cinquantaine d'années environ. Il faut toutefois citer comme pionniers de la théorie les mathématiciens P. Bohl et E. Esclangon qui, au début du XX^e siècle, ont donné une première généralisation des fonctions périodiques en définissant la classe des fonctions « quasi-périodiques ». La théorie telle qu'on la connaît aujourd'hui a été créée par H. Bohr et ensuite développée par plusieurs auteurs; elle a trouvé de nombreuses applications (voir [1], [5] pour des références plus complètes).

En 1933, S. Bochner [2] a défini et étudié les fonctions presque-périodiques à valeurs dans un espace de Banach; cette extension trouvait ensuite une application dans l'étude des solutions de l'équation des ondes [3]; dans une période plus récente d'autres applications des fonctions presque-périodiques vectorielles ont été mises en évidence (voir [1], [5], [10], [11], [12], [13]) et nous voulons, dans cet exposé, présenter certains de ces nouveaux développements qui, à notre avis méritent une exposition détaillée. Toutefois, il ne s'agit pas ici du tout d'un exposé exhaustif des nouveaux résultats dans ce domaine, mais juste d'une présentation partielle d'un nombre de théorèmes choisis parmi d'autres, pour permettre au lecteur d'entrer dans cette nouvelle branche de l'analyse harmonique.

Pour terminer cette (courte) introduction, nous rappelons premièrement la définition des fonctions presque-périodiques à valeurs dans un espace de Banach $\mathscr{X}$; il s'agit de fonctions (fortement) continues $f : \mathbf{R} \to \mathscr{X}$, jouissant de la propriété suivante:

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $L(\varepsilon) > 0$ de façon que dans tout intervalle réel $[a, a+L]$ on trouve au moins un nombre τ, tel que

$$\sup_{t \in \mathbf{R}} \left\| f(t+\tau) - f(t) \right\|_{\mathscr{X}} < \varepsilon .$$

1) Ce travail est subventionné par le Conseil National de Recherches du Canada.

Nous étudions la presque-périodicité des fonctions $u(t)$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathscr{X}$, vérifiant une équation différentielle

$$u'(t) = Au(t) + f(t)$$

A étant un opérateur linéaire de domaine $\mathscr{D}(A)$ dans l'espace $\mathscr{X}$, alors que $f(t)$ est identiquement nulle ou bien est une fonction presque-périodique. En fait, une partie des résultats est valable dans les espaces de Hilbert seulement, en particulier les théorèmes du § 4 concernant les solutions faibles minimales.

Un autre groupe de résultats (Th. 2.1, 2.2, 3.1, 3.2) porte sur l'équivalence entre les solutions à trajectoire bornée ou relativement compacte et les solutions presque-périodiques; l'origine de ce genre de théorème remonte à Bohr-Neugebauer et Bochner (consulter la Bibliographie, par exemple [1], [5], [12], [13]).

§ 1. Solution presque-périodiques de l'équation $\left(\frac{d}{dt} - A\right)u = 0$

Au début nous allons considérer le cas de l'équation

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t)$$

dans un espace de Banach $\mathscr{X}$, A étant un opérateur linéaire continu de $\mathscr{X}$ en lui-même, et $x(t)$ une fonction continûment différentiable, de $\mathbf{R}$ dans $\mathscr{X}$. Dans ce cas, toute solution s'écrit sous la forme

$$x(t) = U(t)\,x(0),$$

$U(t)$ étant défini comme exponentielle [1]):

$$U(t) = e^{At} = I + \frac{tA}{1!} + \frac{t^2A^2}{2!} + \ldots \frac{t^nA^n}{n!} + \ldots$$

Nous posons la définition suivante (selon [6]):

Définition 1.1. L'espace de Banach $\mathscr{X}$ est parfait si les conditions

$x(t)$ bornée de $\mathbf{R}$ dans $\mathscr{X}$

$x'(t)$ presque périodique de $\mathbf{R}$ dans $\mathscr{X}$

entraînent

$x(t)$ est presque-périodique de $\mathbf{R}$ dans $\mathscr{X}$.

---

1) Voir [7], [8], [9].