

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 24 (1978)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SOLUTIONS PRESQUE-PÉRIODIQUES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ABSTRAITES  
**Autor:** Zaidman, S.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-49693>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 20.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# SOLUTIONS PRESQUE-PÉRIODIQUES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ABSTRAITES

par S. ZAIDMAN<sup>1</sup>

## INTRODUCTION

La théorie des fonctions presque-périodiques se développe avec vigueur depuis une cinquantaine d'années environ. Il faut toutefois citer comme pionniers de la théorie les mathématiciens P. Bohl et E. Esclangon qui, au début du  $xx^e$  siècle, ont donné une première généralisation des fonctions périodiques en définissant la classe des fonctions « quasi-périodiques ». La théorie telle qu'on la connaît aujourd'hui a été créée par H. Bohr et ensuite développée par plusieurs auteurs; elle a trouvé de nombreuses applications (voir [1], [5] pour des références plus complètes).

En 1933, S. Bochner [2] a défini et étudié les fonctions presque-périodiques à valeurs dans un espace de Banach; cette extension trouvait ensuite une application dans l'étude des solutions de l'équation des ondes [3]; dans une période plus récente d'autres applications des fonctions presque-périodiques vectorielles ont été mises en évidence (voir [1], [5], [10], [11], [12], [13]) et nous voulons, dans cet exposé, présenter certains de ces nouveaux développements qui, à notre avis méritent une exposition détaillée. Toutefois, il ne s'agit pas ici du tout d'un exposé exhaustif des nouveaux résultats dans ce domaine, mais juste d'une présentation partielle d'un nombre de théorèmes choisis parmi d'autres, pour permettre au lecteur d'entrer dans cette nouvelle branche de l'analyse harmonique.

Pour terminer cette (courte) introduction, nous rappelons premièrement la définition des fonctions presque-périodiques à valeurs dans un espace de Banach  $\mathcal{X}$ ; il s'agit de fonctions (fortement) continues  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{X}$ , jouissant de la propriété suivante:

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $L(\varepsilon) > 0$  de façon que dans tout intervalle réel  $[a, a+L]$  on trouve au moins un nombre  $\tau$ , tel que

$$\sup_{t \in \mathbf{R}} \|f(t+\tau) - f(t)\|_{\mathcal{X}} < \varepsilon.$$

---

<sup>1</sup>) Ce travail est subventionné par le Conseil National de Recherches du Canada.

Nous étudions la presque-périodicité des fonctions  $u(t)$  de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathcal{X}$ , vérifiant une équation différentielle

$$u'(t) = Au(t) + f(t)$$

$A$  étant un opérateur linéaire de domaine  $\mathcal{D}(A)$  dans l'espace  $\mathcal{X}$ , alors que  $f(t)$  est identiquement nulle ou bien est une fonction presque-périodique. En fait, une partie des résultats est valable dans les espaces de Hilbert seulement, en particulier les théorèmes du § 4 concernant les solutions faibles minimales.

Un autre groupe de résultats (Th. 2.1, 2.2, 3.1, 3.2) porte sur l'équivalence entre les solutions à trajectoire bornée ou relativement compacte et les solutions presque-périodiques; l'origine de ce genre de théorème remonte à Bohr-Neugebauer et Bochner (consulter la Bibliographie, par exemple [1], [5], [12], [13]).

## § 1. SOLUTION PRESQUE-PÉRIODIQUES DE L'ÉQUATION $\left(\frac{d}{dt} - A\right)u = 0$

Au début nous allons considérer le cas de l'équation

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t)$$

dans un espace de Banach  $\mathcal{X}$ ,  $A$  étant un opérateur linéaire continu de  $\mathcal{X}$  en lui-même, et  $x(t)$  une fonction continûment différentiable, de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathcal{X}$ . Dans ce cas, toute solution s'écrit sous la forme

$$x(t) = U(t)x(0),$$

$U(t)$  étant défini comme exponentielle <sup>1)</sup>:

$$U(t) = e^{At} = I + \frac{tA}{1!} + \frac{t^2 A^2}{2!} + \dots + \frac{t^n A^n}{n!} + \dots$$

Nous posons la définition suivante (selon [6]):

*Définition 1.1.* L'espace de Banach  $\mathcal{X}$  est parfait si les conditions

$x(t)$  bornée de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathcal{X}$

$x'(t)$  presque périodique de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathcal{X}$

entraînent

$x(t)$  est presque-périodique de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathcal{X}$ .

<sup>1)</sup> Voir [7], [8], [9].

On a ici le résultat suivant ([6]):

**THÉORÈME 1.1.** *Soit  $A$  un opérateur linéaire compact dans l'espace de Banach parfait  $\mathcal{X}$ . Supposons aussi que*

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|e^{At}\| < \infty.$$

*Alors, toute solution  $x(t)$  de l'équation  $x'(t) = Ax(t)$  est presque-périodique.*

*Démonstration.* Vu que  $x(t) = e^{At} x(0)$ , il suit que toute solution est bornée. Par suite, l'ensemble  $\{Ax(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  est relativement compact dans  $\mathcal{X}$ , et donc l'ensemble  $\{x'(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  a la même propriété.

Il est bien connu (voir [1], [2], [5]) qu'une fonction continue  $f(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  dans un espace de Banach est presque périodique si et seulement si toute suite de réels  $(h_n)_1^\infty$  contient une sous-suite  $(h_{n_p})_1^\infty$ , telle que la suite de fonctions  $(f(t+h_{n_p}))_1^\infty$  soit de Cauchy dans la convergence forte de  $\mathcal{X}$ , uniforme pour  $t \in \mathbb{R}$ .

Nous appliquons ce résultat pour déduire la presque-périodicité de  $x'(t)$  (et donc de  $x(t)$ , vu que  $\mathcal{X}$  est parfait). Nous pouvons trouver une suite partielle  $(h_{n_p})_1^\infty$  de façon que la suite  $\{x'(h_{n_p})\}_1^\infty$  soit de Cauchy dans  $\mathcal{X}$ . On a ensuite:

$$\begin{aligned} x'(t+h_{n_p}) &= Ax(t+h_{n_p}) \\ &= Ae^{A(t+h_{n_p})} x(0) = Ae^{At} e^{Ah_{n_p}} x(0) = Ae^{At} x(h_{n_p}) \\ &= e^{At} Ax(h_{n_p}) = e^{At} x'(h_{n_p}). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \|x'(t+h_{n_p}) - x'(t+h_{n_q})\| &= \|e^{At}(x'(h_{n_p}) - x'(h_{n_q}))\| \\ &\leq \sup_{-\infty < t < \infty} \|e^{At}\| \|x'(h_{n_p}) - x'(h_{n_q})\| \end{aligned}$$

Cela prouve le résultat voulu.

## § 2. PRESQUE-PÉRIODICITÉ DES SOLUTIONS BORNÉES

On considère l'équation non-homogène,

$$x'(t) = Ax(t) + f(t)$$

dans un espace de Hilbert. On a premièrement le résultat suivant (voir par exemple [13]).



THÉORÈME 2.1. Soit  $A$  un opérateur borné auto-adjoint dans l'espace de Hilbert  $H$ , tel que l'on ait, avec  $m_1 < m_2 < 0$ , la relation

$$m_1 \|x\|^2 \leq (Ax, x) \leq m_2 \|x\|^2, \quad \forall x \in H.$$

Soit  $f(t)$  presque-périodique dans  $H$ ,  $u(t)$  bornée dans  $H$ , et  $u'(t) = Au(t) + f(t)$ .

Alors,  $u(t)$  est presque-périodique dans  $H$  et est donnée par la formule

(convergente) :  $u(t) = \int_{-\infty}^t e^{A(t-\sigma)} f(\sigma) d\sigma$  et l'on a

$$\|u(t)\| \leq \frac{1}{|m_2|} \sup_{t \in \mathbf{R}} \|f(t)\|.$$

*Démonstration.* Remarquons au début que notre équation admet une seule solution bornée sur l'axe réel.

En effet, si  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  étaient deux solutions bornées, leur différence  $v(t)$  est une solution bornée sur  $\mathbf{R}$ , de l'équation  $v'(t) = Av(t)$ .

En multipliant scalairement avec  $v(t)$ , on déduit la relation

$$(v'(t), v(t)) = (Av(t), v(t))$$

et aussi l'égalité

$$(v(t), v'(t)) = (v(t), Av(t)) = (Av(t), v(t));$$

on obtient donc

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v(t)\|^2 = (Av(t), v(t)) \leq m_2 \|v(t)\|^2 \leq 0,$$

et par conséquent la fonction  $\|v(t)\|^2$  est non-croissante. En intégrant de  $-R$  à 0, on trouve l'inégalité

$$\frac{1}{2} (\|v(0)\|^2 - \|v(-R)\|^2) \leq m_2 \int_{-R}^0 \|v(\sigma)\|^2 d\sigma,$$

ou bien

$$\frac{1}{2|m_2|} (\|v(-R)\|^2 - \|v(0)\|^2) \geq \int_{-R}^0 \|v(\sigma)\|^2 d\sigma.$$

Si  $\|v(t)\|^2$  reste bornée, elle aura une limite pour  $t \rightarrow -\infty$ , et si cette limite est  $> 0$ , on déduit que

$$\lim_{R \uparrow \infty} \int_{-R}^0 \|v(\sigma)\|^2 d\sigma = \infty. \text{ Par conséquent, } \lim_{R \uparrow \infty} \|v(-R)\|^2 = \infty$$

aussi, absurde.

Remarquons maintenant que toute solution  $w(t)$  de l'équation  $w'(t) = Aw(t)$  ne s'annule jamais si  $w(t) \neq 0$ . Par conséquent, dans l'inégalité

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w(t)\|^2 \leq m_2 \|w(t)\|^2,$$

on peut diviser par  $\|w(t)\|^2$ , et on en déduit  $\frac{d}{dt} \ln \|w(t)\|^2 \leq 2m_2$ ; en intégrant ensuite de 0 à  $t > 0$ , on obtient

$$\ln \frac{\|w(t)\|^2}{\|w(0)\|^2} \leq 2m_2 t, \text{ et donc } \frac{\|w(t)\|^2}{\|w(0)\|^2} \leq e^{2m_2 t},$$

et enfin  $\|w(t)\|^2 \leq e^{2m_2 t} \|w(0)\|^2$ , où encore, puisque  $w(t) = e^{At} w(0)$ ,  $\|e^{At} w(0)\| \leq e^{m_2 t} \|w(0)\|$ ; ici  $w(0)$  est un élément arbitraire de  $H$ ; par conséquent, pour tout  $t > 0$ , on a l'inégalité  $\|e^{At}\| \leq e^{m_2 t}$  qui est fondamentale dans le reste de la démonstration.

Considérons en effet l'intégrale impropre  $\int_{-\infty}^t e^{A(t-\sigma)} f(\sigma) d\sigma$ ; on voit que  $t - \sigma > 0$  et donc

$$\|e^{A(t-\sigma)} f(\sigma)\| \leq e^{m_2(t-\sigma)} \sup_{\sigma \in \mathbb{R}} \|f(\sigma)\|$$

( $f(t)$ , comme toute autre fonction presque-périodique, est bornée sur l'axe réel). Aussi

$$\int_{-\infty}^t e^{m_2(t-\sigma)} d\sigma = \frac{1}{|m_2|};$$

notre intégrale est donc convergente, et on a aussi la majoration

$$\left\| \int_{-\infty}^t e^{A(t-\sigma)} f(\sigma) d\sigma \right\| \leq \frac{1}{|m_2|} \sup_{\sigma \in \mathbb{R}} \|f(\sigma)\|$$

Maintenant la fonction  $Z(t)$  définie par cette intégrale est solution de l'équation  $Z' = AZ + f$ , et cela se voit sans difficulté. Donc, vu que  $\|Z(t)\| \leq \frac{1}{|m_2|} \sup \|f(\sigma)\|$ ,  $Z(t)$  est une solution bornée, elle coïncide donc avec  $u(t)$ .

Enfin,

$$Z(t) = u(t) = \int_{-\infty}^t e^{A(t-\sigma)} f(\sigma) d\sigma = \int_0^{\infty} e^{A\tau} f(t-\tau) d\tau$$

est une fonction presque-périodique; en effet, si  $\varepsilon > 0$  est donné arbitrairement, on trouve, pour chaque  $\xi \in [a, a + L(\varepsilon)]$ , qui est en plus une  $\varepsilon$ -presque-période de  $f$  l'égalité

$$Z(t + \xi) - Z(t) = \int_0^\infty e^{A\tau} [f(t + \xi - \tau) - f(t - \tau)] d\tau,$$

et la majoration

$$\|Z(t + \xi) - Z(t)\| \leq \int_0^\infty e^{m_2\tau} \|f(t + \xi - \tau) - f(t - \tau)\| d\tau \leq \frac{\varepsilon}{|m_2|}, t \in \mathbf{R},$$

ce qui démontre la presque-périodicité de  $Z(t) = u(t)$ , et donc le Théorème 2.1.

En restant toujours dans un espace de Hilbert  $H$ , on considère de nouveau l'équation différentielle non-homogène

$$(2.1) \quad u'(t) = Au(t) + f(t).$$

On fait les hypothèses suivantes

i)  $f(t)$  est presque-périodique, de  $\mathbf{R}$  dans  $H$ .

ii)  $A$  est un opérateur linéaire compact de  $H$  en lui-même, jouissant aussi de la propriété suivante:

Il existe une décomposition orthogonale  $H = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_n \oplus \dots$  en sous-espaces de dimension finie, chaque sous-espace  $H_j$ , ainsi que son complément orthogonal  $H_j^\perp$ , étant laissé invariant par  $A$  (qui commute donc avec  $P_j$  et  $(I - P_j)$ , les projections orthogonales sur  $H_j$  et  $H_j^\perp$  respectivement). (Voir [9] pour les définitions de base.)

On a alors le résultat suivant, essentiellement dû à R. Cooke [4].

**THÉOREME 2.2.** *Soit  $u(t)$  une fonction continûment différentiable de  $\mathbf{R}$  dans  $H$ , vérifiant l'équation (2.1) avec les hypothèses i), ii), telle que*  

$$\sup_{t \in \mathbf{R}} \|u(t)\|_H < \infty.$$

*Alors  $u(t)$  est presque-périodique.*

Pour démontrer ce résultat, on considère les fonctions  $u_j(t) = P_j u(t)$ ,  $f_j(t) = P_j f(t)$ , qui vérifient la relation

$$(2.2) \quad u'_j(t) = Au_j(t) + f_j(t), t \in \mathbf{R}, \forall j = 1, 2, \dots$$

Il s'agit maintenant d'une équation différentielle dans l'espace de dimension finie  $H_j$  (cela pour tout  $j = 1, 2, \dots$ ):  $f_j(t)$  est presque-périodique dans  $H_j$  tandis que  $u_j(t)$  est une solution bornée de 2.2). On peut donc appliquer

le résultat classique de Bochner cité dans l'introduction <sup>1)</sup>, pour déduire que chaque fonction  $u_j(t)$  est presque-périodique dans  $H_j$ , et par conséquent, dans  $H$  aussi.

Maintenant, pour tout  $h \in H$ , on a  $h = \sum_{j=1}^{\infty} P_j h$ , et donc, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a que

$$u(t) = \sum_{j=1}^{\infty} P_j u(t) = \sum_{j=1}^{\infty} u_j(t).$$

Considérons aussi la série

$$\sum_{j=1}^{\infty} P_j Au(t) = \sum_{j=1}^{\infty} Au_j(t) = Au(t).$$

Rappelons enfin le fait élémentaire suivant:

*dans la série d'opérateurs  $\sum_{j=1}^{\infty} P_j = I$  qui converge fortement (c'est-à-dire*

*que  $\sum_{j=1}^{\infty} P_j x = x$ , pour tout  $x \in H$ ), la convergence est uniforme quand  $x$  varie dans tout ensemble relativement compact de  $H$ .*

Vu que  $u(t)$  est fonction bornée dans  $H$ , il résulte que l'ensemble  $\{Au(t)\}_{-\infty < t < \infty}$  est relativement compact dans  $H$ , et par conséquent la série  $\sum_{j=1}^{\infty} P_j Au(t)$  est uniformément convergente pour  $t \in \mathbb{R}$ .

Chaque fonction  $Au_j(t)$  étant manifestement presque-périodique, il s'ensuit que  $Au(t)$  est presque-périodique aussi. Par suite, la dérivée  $u'(t) = Au(t) + f(t)$  est presque-périodique, et puisque  $H$  est un espace parfait <sup>2)</sup>, et  $u(t)$  est bornée, le théorème en résulte.

### § 3. PRESQUE-PÉRIODICITÉ DES SOLUTIONS A TRAJECTOIRE RELATIVEMENT COMPACTE

Nous allons étudier maintenant des solutions presque-périodiques pour des équations

$$(3.1) \quad u'(t) = Au(t) + f(t).$$

$A$  étant maintenant un opérateur linéaire de domaine  $\mathcal{D}(A)$  dense, mais non nécessairement continu.

<sup>1)</sup> Précisément le Th. 4.2 (pag. 92) dans [5].

<sup>2)</sup> Théorème de L. Amerio (voir par ex. [1] et [12]).

Le premier résultat, assez simple, et bien connu (voir [1] et [3]), concerne l'équation homogène. Précisément on a le

**THÉORÈME 3.1.** *Soit  $A$  un opérateur linéaire de domaine dense  $\mathcal{D}(A)$  dans l'espace de Hilbert  $H$ , tel que  $(Ah, k)_H = -(h, Ak)_H$ , pour tout  $h, k \in \mathcal{D}(A)$ . Soit  $u(t)$  une fonction continûment différentiable de  $\mathbf{R}$  dans  $H$ , à valeurs dans  $\mathcal{D}(A)$ , telle que  $u'(t) = Au(t)$ ,  $t \in \mathbf{R}$ . Supposons que l'ensemble  $\{u(t)\}_{t \in \mathbf{R}}$  est relativement compact dans  $H$ . Alors  $u(t)$  est presque-périodique dans  $H$ .*

*Démonstration.* Soit  $v(t)$  une solution arbitraire de l'équation  $v'(t) = Av(t)$ ; soit  $\phi(t)$  la fonction à valeurs réelles

$$\phi(t) = \|v(t)\|_H^2 = (v(t), v(t))_H;$$

$\phi(t)$  est donc continûment différentiable et l'on a

$$\begin{aligned} \phi'(t) &= (v'(t), v(t))_H + (v(t), v'(t))_H \\ &= (Av(t), v(t))_H + (v(t), Av(t))_H = 0 \end{aligned}$$

vu que  $A$  est antisymétrique. Il résulte donc  $\phi(t) = \phi(0)$ , c'est-à-dire  $\|v(t)\|_H^2 = \|v(0)\|_H^2$ ,  $t \in \mathbf{R}$ .

Prenons maintenant, pour tout nombre réel  $\sigma$ , la fonction translatée  $v_\sigma(t) = u(t + \sigma)$ ; on a  $v'_\sigma(t) = Av_\sigma(t)$ ; pour  $\sigma_1, \sigma_2$  arbitraires on trouve que

$$(v_{\sigma_1}(t) - v_{\sigma_2}(t))' = A(v_{\sigma_1}(t) - v_{\sigma_2}(t)),$$

et donc

$$\|v_{\sigma_1}(t) - v_{\sigma_2}(t)\|_H^2 = \|v_{\sigma_1}(0) - v_{\sigma_2}(0)\|_H^2, \quad t \in \mathbf{R},$$

ce qui revient à l'égalité

$$\|u(t + \sigma_1) - u(t + \sigma_2)\|_H^2 = \|u(\sigma_1) - u(\sigma_2)\|_H^2, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Si maintenant  $(\sigma_n)_1^\infty$  est une suite arbitraire de réels, on peut en extraire une sous-suite  $(\sigma_{n_p})_1^\infty$ , de façon que la suite  $\{u(\sigma_{n_p})\}_{p=1}^\infty$  soit de Cauchy dans  $H$ . Mais alors,

$$\sup_{t \in \mathbf{R}} \|u(t + \sigma_{n_p}) - u(t + \sigma_{n_q})\|_H^2 = \|u(\sigma_{n_p}) - u(\sigma_{n_q})\|_H^2$$

et par conséquent la suite de translatées  $\{u(t + \sigma_{n_p})\}_{p=1}^\infty$ , est une suite de Cauchy par rapport à la convergence uniforme sur  $\mathbf{R}$ . Cela démontre la presque-périodicité de  $u(t)$ , d'après le critère de Bochner.

Le deuxième résultat ici concerne l'équation non-homogène,  $u'(t) = Au(t) + f(t)$ , dans un espace de Banach arbitraire  $\mathcal{X}$ . Par hypothèse,  $A$  sera maintenant un opérateur linéaire, fermé, de domaine dense  $\mathcal{D}(A)$  dans  $\mathcal{X}$ , qui est le générateur infinitésimal d'un groupe  $G(t)$  de transformations linéaires continues de  $\mathcal{X}$  en lui-même. Pour être plus précis, on suppose que  $G(t)$  est une fonction de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ <sup>1)</sup>, telle que  $G(t)x$  est continue pour tout  $x \in \mathcal{X}$ ;  $G(0)$  sera l'opérateur identité dans  $\mathcal{X}$ , et on aura  $G(t_1 + t_2) = G(t_1)G(t_2)$  pour toute paire de nombres réels  $t_1$  et  $t_2$ . On suppose aussi que la relation

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{G(\eta)x - x}{\eta} = Ax$$

a lieu si et seulement si  $x \in \mathcal{D}(A)$ . Nous allons démontrer le résultat suivant (voir [10]):

**THÉORÈME 3.2.** *Soit  $f(t)$  une fonction continue presque-périodique de  $t \in \mathbf{R}$  à valeurs dans  $\mathcal{X}$ . Soit  $u(t)$  une fonction de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathcal{D}(A)$ , continûment différentiable dans  $\mathcal{X}$ , vérifiant la relation :*

$$u'(t) = Au(t) + f(t), \quad t \in \mathbf{R}.$$

*Supposons aussi que l'ensemble  $\{u(t)\}_{t \in \mathbf{R}}$  soit relativement compact dans  $\mathcal{X}$ , et que la fonction  $G(t)x$  soit presque-périodique de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathcal{X}$ , pour tout  $x \in \mathcal{X}$ . Alors  $u(t)$  est aussi presque-périodique.*

Le théorème sera une conséquence de certains lemmes de caractère élémentaire. Premièrement, un résultat de représentation des solutions moyennant une formule intégrale:

**LEMME 1.** *Si  $f(t)$  est continue de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathcal{X}$ , et si  $u(t)$  est une solution de l'équation  $u'(t) = Au(t) + f(t)$ , on a*

$$u(t) = G(t)u(0) + \int_0^t G(t-\sigma)f(\sigma)d\sigma \quad \text{pour tout } t \in \mathbf{R}.$$

On considère en effet la relation  $u'(\sigma) = Au(\sigma) + f(\sigma)$ ,  $\sigma \in \mathbf{R}$ , et on applique des deux côtés l'opérateur  $G(t-\sigma)$ , où  $t$  est fixé. En intégrant de 0 à  $t$ , on déduit

$$\int_0^t G(t-\sigma)u'(\sigma)d\sigma = \int_0^t G(t-\sigma)Au(\sigma)d\sigma + \int_0^t G(t-\sigma)f(\sigma)d\sigma.$$

<sup>1)</sup> Espace des opérateurs linéaires continus de  $\mathcal{X}$  en  $\mathcal{X}$ .

D'un autre côté, ce n'est pas difficile à voir que  $\frac{d}{d\sigma} G(t-\sigma) u(\sigma) = -AG(t-\sigma)u(\sigma) + G(t-\sigma)u'(\sigma)$ ; en intégrant ici de 0 à  $t$  on trouve que

$$u(t) - G(t)u(0) = - \int_0^t AG(t-\sigma)u(\sigma) d\sigma + \int_0^t G(t-\sigma)u'(\sigma) d\sigma$$

et en additionnant on voit, par la commutativité de  $G(t-\sigma)$  avec  $A$ , l'égalité

$$u(t) - G(t)u(0) = \int_0^t G(t-\sigma)f(\sigma) d\sigma, t \in \mathbf{R}.$$

Pour intégrer on utilise le fait immédiat que  $G(\xi)h(\xi)$  est continue de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathcal{X}$ , pour toute fonction continue  $h(\xi)$  de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathcal{X}$ . On a aussi un résultat de compacité exprimé dans le lemme suivant.

LEMME 2. Soit  $G(t)$  un groupe à un paramètre fortement continu, ayant la propriété que l'ensemble  $\{G(t)x\}_{t \in \mathbf{R}}$  est relativement compact dans  $\mathcal{X}$ , pour tout  $x \in \mathcal{X}$ . Supposons aussi que  $f(t)$  soit une fonction de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathcal{X}$ , telle que l'ensemble  $\{f(t)\}_{t \in \mathbf{R}}$  soit relativement compact dans  $\mathcal{X}$ .

Alors, l'ensemble  $\{G(t)f(t)\}_{t \in \mathbf{R}}$  est relativement compact dans  $\mathcal{X}$ .

En effet, on remarque premièrement que  $\sup \|G(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X})} = M < \infty$  d'après le théorème sur la borne uniforme, et vu que tout ensemble relativement compact est borné.

Prenons alors une suite arbitraire  $\{t_n\}_1^\infty$  de réels et extrayons une sous-suite  $\{t'_n\}_1^\infty$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(t'_n) = \omega \in \mathcal{X}$ . Après une seconde extraction,

on trouve une sous-suite  $\{t''_n\}_1^\infty \subset \{t'_n\}_1^\infty$  telle que la suite  $\{G(t''_n)\omega\}_0^\infty$  est aussi de Cauchy. On en déduit alors que la suite  $\{G(t''_n)f(t''_n)\}_{n=1}^\infty$  est de Cauchy dans  $\mathcal{X}$ , en observant l'égalité

$$\begin{aligned} G(t''_n)f(t''_n) - G(t''_m)f(t''_m) &= [G(t''_n) - G(t''_m)][f(t''_n) - \omega] \\ &\quad + [G(t''_n) - G(t''_m)]\omega + G(t''_m)[f(t''_n) - f(t''_m)], \end{aligned}$$

et donc la majoration

$$\begin{aligned} \|G(t''_n)f(t''_n) - G(t''_m)f(t''_m)\| &\leq 2M\|f(t''_n) - \omega\| \\ &\quad + \| [G(t''_n) - G(t''_m)]\omega \| + M\|f(t''_n) - f(t''_m)\|. \end{aligned}$$

On passe ensuite à un résultat de presque-périodicité, exprimé dans le

LEMME 3. Soit  $G(t)$  un groupe à un paramètre fortement continu, tel que la fonction  $G(t)x$  soit presque-périodique pour tout  $x \in \mathcal{X}$ . Soit

$f(t)$  une fonction presque-périodique dans  $\mathcal{X}$ . Alors la fonction  $G(t)f(t)$  est aussi presque-périodique.

Pour prouver ce Lemme, remarquons que l'ensemble  $\{f(t)\}_{t \in \mathbf{R}}$  est relativement compact dans  $\mathcal{X}$ , ce qui arrive pour toute fonction presque-périodique <sup>1)</sup>. Il existe alors, pour tout  $\varepsilon > 0$ , des éléments  $f(t_1), f(t_2), \dots, f(t_v)$ , de façon que, pour tout  $t$  réel, on ait la relation

$$f(t) \in \bigcup_{k=1}^v \mathfrak{S}(f(t_k), \varepsilon) \text{ où } \mathfrak{S}(y_0, \varepsilon) = \{x \in X, \|x - y_0\| < \varepsilon\}.$$

Prenons maintenant en considération les fonctions presque-périodiques (en nombre fini)

$$f(t), G(t)f(t_1), G(t)f(t_2), \dots, G(t)f(t_v)$$

d'après résultats connus <sup>2)</sup>, il existe un ensemble relativement dense  $\{\tau\}_\varepsilon$  commun pour ces fonctions, formé de  $\varepsilon$ -presque-périodes. De plus, comme dans le Lemme 2, on a  $\sup_{t \in \mathbf{R}} \|G(t)\|_{\mathcal{L}(X, X)} = M < \infty$ . En prenant arbitrairement  $\bar{t} \in \mathbf{R}$ , on trouve un  $t_k$ , tel que  $\|f(\bar{t}) - f(t_k)\| < \varepsilon$ . On déduit ensuite, pour  $\tau \in \{\tau\}_\varepsilon$ , la relation

$$\begin{aligned} & G(\bar{t} + \tau)f(\bar{t} + \tau) - G(\bar{t})f(\bar{t}) \\ &= G(\bar{t} + \tau)[f(\bar{t} + \tau) - f(\bar{t})] + G(\bar{t} + \tau)[f(\bar{t}) - f(t_k)] \\ &+ G(\bar{t} + \tau)f(t_k) - G(\bar{t})f(t_k) + G(\bar{t})[f(t_k) - f(\bar{t})] \end{aligned}$$

et donc la majoration

$$\|G(\bar{t} + \tau)f(\bar{t} + \tau) - G(\bar{t})f(\bar{t})\| \leq M\varepsilon + M\varepsilon + \varepsilon + M\varepsilon = 3M\varepsilon + \varepsilon.$$

ce qui prouve le Lemme,  $\bar{t}$  étant un réel arbitraire.

LEMME 4. Si  $h(t)$  est une fonction presque périodique de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathcal{X}$ , alors  $\check{h}(t) = h(-t)$  est aussi une fonction presque-périodique.

En effet, si  $\tau$  est une  $\varepsilon$ -presque-période de  $h(t)$ , alors  $-\tau$  est une  $\varepsilon$ -presque-période de  $\check{h}(t)$ , vu que

$$\check{h}(t - \tau) - \check{h}(t) = h(-t + \tau) - h(-t)$$

<sup>1)</sup> Voir [1], IV — pag. 5.

<sup>2)</sup> Voir [1], pag. 10.



et

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|\check{h}(t-\tau) - \check{h}(t)\| = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|h(-t+\tau) - h(-t)\| < \varepsilon$$

En plus, si  $\{\tau\}_\varepsilon$  est un ensemble relativement dense de nombres réels, l'ensemble  $\{-\tau\}_\varepsilon$  est aussi relativement dense.

Par conséquent, si le groupe d'opérateurs  $G(t)$  est tel que  $G(t)x$  est presque-périodique pour tout  $x \in \mathcal{X}$ , alors le groupe  $\check{G}(t) = G(-t)$  vérifie la même propriété.

On peut donc maintenant donner la

*Démonstration du Théorème 3.2.* En vue du Lemme 1 et de la presque-périodicité de la fonction  $G(t)u(0)$ , il nous reste à prouver que la fonction  $v(t) = \int_0^t G(t-\sigma)f(\sigma)d\sigma$  est presque-périodique. On voit immédiatement que l'ensemble  $\{v(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  est relativement compact dans  $\mathcal{X}$ , vu que chaque élément de cet ensemble s'écrit sous la forme  $v(t) = u(t) - G(t)u(0)$ , les deux ensembles  $\{u(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  et  $\{G(t)u(0)\}_{t \in \mathbb{R}}$  étant aussi relativement compacts.

On a aussi

$$v(t) = G(t) \int_0^t G(-\sigma)f(\sigma)d\sigma$$

et donc

$$G(-t)v(t) = \int_0^t G(-\sigma)f(\sigma)d\sigma.$$

Maintenant, l'ensemble  $\{G(-t)v(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  est relativement compact, d'après le Lemme 2 et le Lemme 4.

D'autre part, la fonction  $G(-\sigma)f(\sigma)$  est presque-périodique (d'après les Lemmes 3 et 4); vu que l'ensemble  $\left\{ \int_0^t G(-\sigma)f(\sigma)d\sigma \right\}_{t \in \mathbb{R}}$  est relativement compact dans  $\mathcal{X}$ , on déduit, par un théorème de Bochner [2] (voir aussi [1], I — pag. 53, 57, 58, 59, et [5], Th. 6.19, pag. 161) la presque-périodicité de  $\int_0^t G(-\sigma)f(\sigma)d\sigma$ .

En appliquant de nouveau le Lemme 3, on trouve que  $\int_0^t G(t-\sigma)f(\sigma)d\sigma$  est presque-périodique, ce qui prouve le théorème.

#### § 4. PRESQUE-PÉRIODICITÉ DES SOLUTIONS FAIBLES MINIMALES

Dans ce paragraphe relié au papier [11] <sup>1)</sup> on se restreint à un espace de Hilbert  $H$ ; on considère un opérateur linéaire fermé  $A$ , de domaine dense dans  $H$ , étant le générateur infinitésimal d'un groupe  $U(t)$  de transformations unitaires de  $H$  en soi-même; donc  $U^*(t) = [U(t)]^{-1} = U(-t)$ , pour  $t \in \mathbf{R}$ , et  $\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{\eta} [U(\eta)x - x] = Ax$  si et seulement si  $x \in \mathcal{D}(A)$ . On sait que  $iA$  est alors un opérateur auto-adjoint, et on voit (cf. Th. 3.1) que pour toute solution  $v(t)$  de l'équation  $v'(t) = Av(t)$  on trouve  $\|v(t)\|^2 = \text{const}$ ,  $t \in \mathbf{R}$ . On a vu aussi que si  $f(t)$  est une fonction continue, et si  $u(t)$  est une solution de l'équation  $u'(t) = Au(t) + f(t)$ , alors  $u(t)$  admet la représentation intégrale

$$u(t) = U(t)u(0) + \int_0^t U(t-\sigma)f(\sigma) d\sigma, t \in \mathbf{R}.$$

D'après le § 4 Ch. I de [14] <sup>2)</sup> si  $u(0) \in \mathcal{D}(A)$  et si  $f(\sigma)$  est continûment différentiable, alors  $u(t)$  est une solution de l'équation  $u' = Au + f$ ; dans le cas général, nous disons que toute fonction  $U(t)x + \int_0^t U(t-\sigma)f(\sigma) d\sigma$ , où  $x \in H$  et  $f(\sigma)$  est continue dans  $H$ , est une solution faible de la même équation.

Définissons maintenant, pour toute fonction continue  $f(t)$  de  $\mathbf{R}$  dans  $H$ , l'ensemble  $\Omega_f$  formé des solutions faibles  $u(t)$  de l'équation  $u'(t) = Au(t) + f(t)$ , qui vérifient aussi la condition supplémentaire

$$\sup_{t \in \mathbf{R}} \|u(t)\| = \mu(u) < \infty.$$

La fonctionnelle  $v \rightarrow \mu(v) = \sup_{t \in \mathbf{R}} \|v(t)\|$  est donc bien définie sur l'ensemble  $\Omega_f$ , et prend des valeurs finies  $\geq 0$ . On a alors le

**THÉORÈME 4.1.** *Supposons que l'ensemble  $\Omega_f$  ne soit pas vide. Il existe alors une solution faible  $w(t)$  de l'équation  $w' = Aw + f$ , et une seule, ayant la propriété que  $\mu(w) = \inf_{v \in \Omega_f} \mu(v) = \mu^*$ .*

<sup>1)</sup> Il s'agit d'une version « abstraite » de ce travail.

<sup>2)</sup> Ou bien par le Th. 2.2.3 de [8].

Remarquons, avant de commencer la démonstration, que si  $\Omega_f$  est un ensemble fini, l'existence d'une solution minimale est évidente, mais non l'unicité d'une telle solution.

Prouvons donc l'unicité des solutions minimales, en admettant leur existence.

Si  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  étaient deux solutions minimales, on aurait  $u_i(t) = U(t) u_i(0) + \int_0^t U(t-\sigma) f(\sigma) d\sigma$ ,  $i = 1, 2$ , et aussi  $\mu(u_1) = \mu(u_2) = \mu^*$

Considérons alors les fonctions

$$\frac{1}{2} [u_1(t) - u_2(t)] = U(t) \left( \frac{u_1(0) - u_2(0)}{2} \right)$$

et

$$\frac{1}{2} [u_1(t) + u_2(t)] = U(t) \left( \frac{u_1(0) + u_2(0)}{2} \right) + \int_0^t U(t-\sigma) f(\sigma) d\sigma.$$

On a que

$$\frac{1}{2} \|u_1(t) - u_2(t)\| = \frac{1}{2} \|u_1(0) - u_2(0)\|, \forall t \in \mathbf{R},$$

et aussi

$$\frac{1}{2} [u_1(t) + u_2(t)] \in \Omega_f,$$

et par suite

$$\mu^* \leq \mu \left( \frac{1}{2} (u_1(t) + u_2(t)) \right).$$

On applique maintenant l'identité du parallélogramme, valable dans tout espace de Hilbert

$$\frac{1}{4} \|h + k\|^2 + \frac{1}{4} \|h - k\|^2 = \frac{1}{2} (\|h\|^2 + \|k\|^2),$$

en prenant, pour chaque  $t$  fixé,  $h = u_1(t)$ ,  $k = u_2(t)$ . On obtient alors

$$\frac{1}{4} \|u_1(0) - u_2(0)\|^2 + \left\| \frac{1}{2} [u_1(t) + u_2(t)] \right\|^2 = \frac{1}{2} [\|u_1(t)\|^2 + \|u_2(t)\|^2].$$

Mais, pour chaque  $t$ ,  $\|u_i(t)\| \leq \mu(u_i) = \mu^*$  et donc  $\|u_i(t)\|^2 \leq (\mu^*)^2$ , c'est-à-dire que

$$0 \leq \left\| \frac{u_1(t) + u_2(t)}{2} \right\|^2 \leq (\mu^*)^2 - \frac{1}{4} \|u_1(0) - u_2(0)\|^2 = \bar{\mu}^2 \text{ ou } \bar{\mu} < \mu^*$$

avec inégalité stricte, pour tout  $t \in \mathbf{R}$ .

Par conséquent,  $\left\| \frac{u_1(t) + u_2(t)}{2} \right\| \leq \bar{\mu}$ ,  $t \in \mathbf{R}$  et donc  $\mu \left( \frac{1}{2} (u_1(t) + u_2(t)) \right) \leq \bar{\mu} < \mu^*$ , absurde, vu que on a  $\mu^* \leq \mu \left( \frac{1}{2} (u_1 + u_2) \right)$ .

Démontrons maintenant l'existence d'une solution minimale, dans le cas de tout ensemble  $\Omega_f$  non vide.

D'après la définition de  $\mu^*$  comme borne inférieure exacte de  $\mu(v)$  pour  $v \in \Omega_f$ , on trouve, pour tout  $\varepsilon > 0$ , une fonction  $u_\varepsilon \in \Omega_f$ , telle que  $\mu^* \leq \mu(u_\varepsilon) \leq \mu^* + \varepsilon$ .

Prenons donc une suite  $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ , et une suite  $(u_n)_1^\infty \subset \Omega_f$ , de façon que  $\mu^* \leq \mu(u_n) \leq \mu^* + \frac{1}{n} \leq \mu^* + 1$ ,  $n = 1, 2, \dots$

On a alors  $u_n(t) = U(t) u_n(0) + \int_0^t U(t-s) f(s) ds$ , et aussi le résultat suivant

LEMME. *La suite  $(u_n(0))_1^\infty$  est de Cauchy dans  $H$ .*

En effet, si cela ne se vérifie pas, on peut trouver un nombre  $\rho > 0$ , et deux suites  $(m_p)_1^\infty$ ,  $(n_p)_1^\infty$ ,  $m_p, n_p \geq p$ , telles que on ait l'inégalité  $\|u_{n_p}(0) - u_{m_p}(0)\| \geq \rho$ , pour  $p = 1, 2, \dots$ .

Nous appliquons de nouveau la règle du parallélogramme, comme plus haut, avec  $h = u_{n_p}(t)$ ,  $k = u_{m_p}(t)$ , pour déduire que

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \|u_{n_p}(0) - u_{m_p}(0)\|^2 + \left\| \frac{1}{2} [u_{m_p}(t) + u_{n_p}(t)] \right\|^2 \\ = \frac{1}{2} [\|u_{m_p}(t)\|^2 + \|u_{n_p}(t)\|^2] \end{aligned}$$

et donc aussi les inégalités

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \rho^2 + \left\| \frac{1}{2} [u_{m_p}(t) + u_{n_p}(t)] \right\|^2 &\leq \frac{1}{2} [\mu^2(u_{m_p}) + \mu^2(u_{n_p})] \\ &\leq \frac{1}{2} \left[ (\mu^*)^2 + \frac{1}{n_p^2} + \frac{2}{n_p} \mu^* + (\mu^*)^2 + \frac{1}{m_p^2} + \frac{2}{m_p} \mu^* \right] \\ &= (\mu^*)^2 + o\left(\frac{1}{p}\right), \quad p \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Choisissons maintenant un nombre  $\varepsilon > 0$  et assez petit; pour  $p$  assez grand on peut écrire alors

$$\left\| \frac{1}{2} [u_{n_p}(t) + u_{m_p}(t)] \right\|^2 \leq (\mu^*)^2 + \varepsilon - \frac{\rho^2}{4} = \mu_1^2 < (\mu^*)^2$$

$$\text{si } \varepsilon < \frac{\rho^2}{4}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

On trouve donc  $\mu \left( \frac{1}{2} (u_{n_p} + u_{m_p}) \right) \leq \mu_1 < \mu^*$ , absurde, vu que

$\frac{1}{2} [u_{n_p} + u_{m_p}]$  appartient aussi à  $\Omega_f$ .

Le lemme étant démontré, soit  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(0)$ ; posons  $w(t) = U(t)x$

$$+ \int_0^t U(t-s)f(s)ds.$$

Alors,  $\|u_n(t) - w(t)\| = \|U(t)(u_n(0) - x)\| = \|u_n(0) - x\| \rightarrow 0$  si  $n \rightarrow \infty$ , et donc  $w(t)$  est limite uniforme de la suite  $(u_n(t))_1^\infty$ .

Ecrivons alors  $u_n(t) = u_n(t) - w(t) + w(t)$ ; on a  $\|u_n(t)\| \leq \|u_n(t) - w(t)\| + \|w(t)\|$  et aussi  $\mu(u_n) \leq \mu(u_n - w) + \mu(w)$ .

Si  $n \rightarrow \infty$ ,  $\mu(u_n - w) \rightarrow 0$ , et  $\mu(u_n) \rightarrow \mu^*$ . On en déduit  $0 \leq \mu^* \leq \mu(w)$ . De la même façon on trouve que  $\mu(w) \leq \mu^*$  et le Th. 4.1 est démontré.

Dans le reste de ce paragraphe, on se propose de prouver que si  $w(t)$  est une solution faible minimale de l'équation  $w' = Aw + f$ , et si  $f(t)$  est  $H$ -presque-périodique, alors  $w(t)$  est aussi presque-périodique. Ce résultat sera une conséquence des théorèmes suivants:

**THÉORÈME 4.2.** *Soit  $f(t)$  continue et presque-périodique de  $\mathbf{R}$  dans  $H$  et soit  $w(t)$  une solution faible minimale, dans l'hypothèse que l'ensemble  $\Omega_f$  n'est pas vide. Alors  $w(t)$  est faiblement presque-périodique.*

**THÉORÈME 4.3.** *Soit  $f(t)$  continue et presque-périodique de  $\mathbf{R}$  dans  $H$  et soit  $v(t)$  une solution faible de l'équation  $v' = Av + f$ , qui est aussi faiblement presque-périodique.*

*Alors, l'ensemble  $\{v(t)\}_{t \in \mathbf{R}}$  est relativement compact, et  $v(t)$  est donc presque-périodique.*

Signalons aussi, un corollaire simple, qui est analogue au Th. 3.2 (on a ici un espace de Hilbert au lieu d'un Banach, mais le groupe  $U(t)$  ne possède pas nécessairement la propriété de presque-périodicité forte).

**THÉORÈME 4.4.** Soit  $f(t)$  continue et  $H$ -presque-périodique, et soit  $v(t)$  une solution faible de  $v' = Av + f$ , telle que l'ensemble  $\{v(t)\}_{t \in \mathbf{R}}$  soit relativement compact dans  $H$ . Alors,  $v(t)$  est presque-périodique.

En effet, si  $v(t)$  est une telle solution,  $v(t)$  est bornée, donc l'ensemble  $\Omega_f$  n'est pas vide. D'après les théorèmes 4.1, 4.2 et 4.3, on trouve une solution faible  $w(t)$  qui est presque-périodique. Alors  $v - w$  est une solution faible de  $(v - w)' = A(v - w)$ , et l'ensemble  $\{v(t) - w(t)\}_{t \in \mathbf{R}}$  est relativement compact. Mais la relation

$$\|v(t) - w(t)\| = \|U(t)(v(0) - w(0))\| = \|v(0) - w(0)\|, \quad t \in \mathbf{R}$$

implique la presque-périodicité de  $v(t) - w(t)$ , comme dans le théorème 3.1. Par conséquent  $v(t) = v(t) - w(t) + w(t)$  est aussi presque-périodique.

On commence maintenant la démonstration du Théorème 4.2. Soit donc  $w(t) = U(t)w(0) + \int_0^t U(t-\sigma)f(\sigma)d\sigma$ , une solution faible minimale, avec  $f(t)$  presque-périodique.

Prenons une suite arbitraire de réels  $(h_n)_1^\infty$ ; il existe une sous-suite  $(h_n^0)_1^\infty$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(t+h_n^0) = g(t)$  existe, uniformément pour  $t \in \mathbf{R}$ , où  $g(t)$  est encore presque-périodique.

Aussi, l'ensemble  $\{w(t)\}_{t \in \mathbf{R}}$  étant borné dans  $H$ , il existe une sous-suite de  $(h_n^0)_1^\infty$ , soit  $(h_n^1)_1^\infty$ , telle que la suite  $\{w(h_n^1)\}_1^\infty$  soit faiblement convergente dans  $H$ , vers un élément  $w^*$ . Posons ensuite

$$w^*(t) = U(t)w^* + \int_0^t U(t-\sigma)g(\sigma)d\sigma.$$

On énonce maintenant le

**LEMME 4.1.** La suite  $(w(t+h_n^1))_1^\infty$  converge faiblement vers  $w^*(t)$ , uniformément sur chaque intervalle compact de  $\mathbf{R}$ .

*Démonstration.* On a, pour tout  $a$  réel, l'égalité

$$w(t+a) = U(t+a)w(0) + \int_0^{t+a} U(t+a-\sigma)f(\sigma)d\sigma;$$

si dans l'intégrale on effectue le changement de variable  $\sigma = s + a$ , on déduit la relation

$$w(t+a) = U(t)U(a)w(0) + \int_{-a}^t U(t-s)f(s+a)ds.$$

D'autre part, on a

$$w(a) = U(a) w(0) + \int_0^a U(a-s) f(s) ds$$

et donc

$$\begin{aligned} U(t) w(a) &= U(t) U(a) w(0) + \int_0^a U(t-s+a) f(s) ds \\ &= U(t) U(a) w(0) + \int_{-a}^0 U(t-\sigma) f(\sigma+a) d\sigma \end{aligned}$$

et finalement

$$w(t+a) = U(t) w(a) + \int_0^t U(t-s) f(s+a) ds$$

On peut donc écrire la formule

$$w(t+h_n^1) = U(t) w(h_n^1) + \int_0^t U(t-s) f(s+h_n^1) ds.$$

Le premier terme à droite converge uniformément sur chaque intervalle compact de  $\mathbf{R}$ , dans  $H$ -faible, vers  $U(t) w^*$ . En effet, prenons un élément arbitraire  $e \in H$ ; on a

$$(e, U(t) w(h_n^1)) = (U(-t) e, w(h_n^1))$$

qui tend donc vers  $(U(-t) e, w^*) = (e, U(t) w^*)$ , pour chaque valeur fixée de  $t$ . Maintenant, cette convergence est uniforme si  $\alpha \leq t \leq \beta$  où  $-\infty < \alpha < \beta < \infty$ . En effet, l'ensemble  $\{U(-t) e\}_{\alpha \leq t \leq \beta}$  est compact dans  $H$ , vu que  $U(-t) e$  est une fonction continue. On a aussi la proposition suivante:

**PROPOSITION.** Soit une suite  $(x_n)_1^\infty \subset H$ , telle que  $(y, x_n) \rightarrow (y, x_0)$  pour tout  $y \in H$ . Soit  $\mathcal{M}$  un ensemble compact dans  $H$ . Alors,  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (y, x_n) = (y, x_0)$  a lieu uniformément si  $y$  parcourt  $\mathcal{M}$ .

Il faut donc prouver que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N(\varepsilon)$ , tel que

$$|(y, x_n - x_0)| < \varepsilon \quad \text{si} \quad n \geq N(\varepsilon) \quad \text{et} \quad y \in \mathcal{M}.$$

Soit  $y_1, \dots, y_p$  dans  $\mathcal{M}$ , tels que  $\mathcal{M} \subset \bigcup_{i=1}^p \mathfrak{S}(y_i, \varepsilon)$ , ce qui est possible en vue de la compacité de  $\mathcal{M}$ .

Pour tout  $i = 1, 2, \dots, p$ , on trouve  $N_i(\varepsilon)$ , tel que  $|(y_i, x_n - x_0)| < \varepsilon$  si  $n \geq N_i(\varepsilon)$ . Soit alors  $N = \max(N_1, N_2, \dots, N_p)$ . Pour  $n \geq N$ , on aura  $|(y_i, x_n - x_0)| \leq \varepsilon, \forall i = 1, 2, \dots, p$ .

Maintenant on a aussi,  $\forall y \in \mathcal{M}$ , un certain  $y_j$ , tel que  $\|y_j - y\| < \varepsilon$ .  
Il en résulte donc

$$|(y, x_n - x_0)| \leq |(y - y_j, x_n - x_0)| + |(y_j, x_n - x_0)| \leq 2\varepsilon \sup_n \|x_n\| + \varepsilon$$

pour  $n \geq N(\varepsilon)$ ; (la suite  $(x_n)_1^\infty$  est bornée, étant faiblement convergente).  
Cela prouve la proposition.

Pour le deuxième terme à droite la convergence est même forte; en fait

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^t U(t-s) f(s + h_n^1) ds - \int_0^t U(t-s) g(s) ds \right\| \\ &= \left\| \int_0^t U(t-s) [f(s + h_n^1) - g(s)] ds \right\| \leq \int_0^t \|f(s + h_n^1) - g(s)\| ds, \end{aligned}$$

ce qui prouve le lemme 4.1.

Remarquons maintenant le fait suivant: on a

$$\sup_{t \in \mathbf{R}} \|w(t)\| = \mu(w) = \mu^* = \inf_{v \in \Omega_f} \mu(v).$$

Aussi, pour tout  $t \in \mathbf{R}$  et pour tout  $e \in H$ , on a que  $(e, w^*(t)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (e, w(t + h_n^1))$ ; mais  $|(e, w(t + h_n^1))| \leq \|e\| \mu^*$ ,  $n = 1, 2, \dots$  donne aussi  $|(e, w^*(t))| \leq \|e\| \mu^*$ .

Il s'ensuit que  $\|w^*(t)\| \leq \mu^*$  pour tout  $t \in \mathbf{R}$ , et donc  $\mu(w^*) \leq \mu^*$ .  
On a maintenant le

LEMME 4.2. *L'égalité  $\mu(w^*) = \mu^*$  est valable.*

Supposons en effet l'inégalité stricte  $\mu(w^*) < \mu^*$ .

Prenons la formule de définition de  $w^*(t)$ , c'est-à-dire

$$w^*(t) = U(t) w^* + \int_0^t U(t-\sigma) g(\sigma) d\sigma$$

où  $g(t)$  était définie comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(t + h_n^1)$ , uniformément sur  $\mathbf{R}$ . Il en résulte alors, comme pour toute fonction presque-périodique, l'égalité  $f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(t - h_n^1)$ , encore uniformément sur  $\mathbf{R}$ .

En extrayant encore une sous-suite<sup>1)</sup>, on trouve aussi que  $w^*(h_n^1)$  est faiblement convergente vers un élément  $Z \in H$ .

<sup>1)</sup> Et sans changer de notation.



On trouve ensuite, comme auparavant, la relation

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w^*(t - h_n^1) = U(t)Z + \int_0^t U(t - \sigma)f(\sigma) d\sigma = Z(t),$$

la convergence étant toujours uniforme sur tout intervalle  $\alpha \leq t \leq \beta$ , dans  $H$ -faible. Maintenant,  $Z(t)$  est dans  $\Omega_f$ , et  $\mu(Z) \leq \mu(w^*)$ . Mais si  $\mu(w^*) < \mu^*$ , on a  $\mu(Z) < \mu^*$ , contredisant la définition de  $\mu^*$ .

Cela prouve le Lemme.

On a enfin le

LEMME 4.3. *La solution faible  $w^*(t)$  est minimale, c'est-à-dire que  $\mu(w^*) = \inf_{w \in \Omega_g} \mu(w)$ .*

En effet, si cela n'est pas vrai, et vu que  $\Omega_g$  n'est pas vide, on trouve (Th. 4.1), une solution minimale unique, disons  $\tilde{w}(t)$ . On aurait donc

$$\mu(\tilde{w}) < \mu(w^*),$$

et

$$\tilde{w}(t) = U(t)\tilde{w}_0 + \int_0^t U(t-s)g(s) ds.$$

En procédant comme dans le Lemme 4.2, on trouverait une suite  $(\tilde{h}_n)_1^\infty$  et une fonction  $\tilde{X}(t)$  telles que dans  $H$ -faible.

$$\tilde{X}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{w}(t - \tilde{h}_n) = U(t)Z^* + \int_0^t U(t-s)f(s) ds,$$

De plus on aurait  $\mu(\tilde{X}) \leq \mu(\tilde{w}) < \mu(w^*) = \mu^*$ , et  $\tilde{X} \in \Omega_f$ , contradiction. A ce point, nous pouvons passer à la

*Démonstration du Théorème 4.2.* Il suffira de prouver que la relation:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w(t + h_n^1) = w^*(t) \text{ dans } H\text{-faible, a lieu uniformément pour } t \in \mathbf{R}.$$

Sinon, il existe au moins un élément  $e_0 \in H$ , tel que  $\lim_{n \rightarrow \infty} (e_0, w(t + h_n^1)) = (e_0, w^*(t))$  ne soit pas uniforme sur  $\mathbf{R}$ .

Par conséquent, on trouve un nombre  $\rho > 0$ , deux suites d'entiers  $(n_p)_1^\infty$ ,  $(m_p)_1^\infty$  où  $n_p, m_p \geq p$ , et une suite  $(t_p)_1^\infty$  de nombres réels, de façon que l'on ait l'inégalité

$$(*) \quad |(e_0, w(t_p + h_{n_p}^1)) - (e_0, w(t_p + h_{m_p}^1))| \geq \rho, \quad \forall p = 1, 2, \dots$$

Après avoir effectué encore deux extractions de sous-suites, et sans changer nécessairement de notation, en utilisant le  $H$ -presque-périodicité de  $f(t)$ , on peut supposer qu'on a les limites

$$\lim_{p \rightarrow \infty} f(t + t_p + h_{n_p}^1) = g_1(t)$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} f(t + t_p + h_{m_p}^1) = g_2(t),$$

la convergence étant uniforme pour  $t \in \mathbf{R}$ .

Si l'on raisonne comme au début de la démonstration du Théorème 4.2, avec une autre extraction de sous-suites, on trouve que les successions  $(w(t + t_p + h_{n_p}^1))_1^\infty$  et  $(w(t + t_p + h_{m_p}^1))_1^\infty$  sont faiblement convergentes, uniformément sur chaque intervalle compact de  $\mathbf{R}$  vers des fonctions

$$w_1^*(t) = U(t) w_1^* + \int_0^t U(t - \sigma) g_1(\sigma) d\sigma$$

et

$$w_2^*(t) = U(t) w_2^* + \int_0^t U(t - \sigma) g_2(\sigma) d\sigma$$

où  $w_1^*(t)$ ,  $w_2^*(t)$  sont des solutions faibles minimales dans  $\Omega_{g_1}$  et  $\Omega_{g_2}$  respectivement.

D'un autre côté, on peut prouver l'égalité  $g_1(\sigma) = g_2(\sigma)$ ,  $\sigma \in \mathbf{R}$ . En effet,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(t + h_n^1)$  existe uniformément sur  $\mathbf{R}$  et les suites  $(h_{n_p}^1)_1^\infty$ ,  $(h_{m_p}^1)_1^\infty$  sont extraites de  $(h_n^1)_1^\infty$ . On déduit que

$$\sup_{\tau \in \mathbf{R}} \|f(\tau + h_{n_p}^1) - f(\tau + h_{m_p}^1)\| < \varepsilon \quad \text{si} \quad p \geq p_0(\varepsilon)$$

ce qui implique  $g_1(\sigma) \equiv g_2(\sigma)$  vu que

$$\sup_{t \in \mathbf{R}} \|f(t + t_p + h_{n_p}^1) - f(t + t_p + h_{m_p}^1)\| < \varepsilon, \quad p \geq p_0(\varepsilon).$$

Ensuite, d'après l'unicité des solutions faibles minimales, on trouve que  $w_1^*(t) = w_2^*(t)$ ,  $t \in \mathbf{R}$ , et en particulier, pour  $t = 0$ ,  $w_1^*(0) = w_2^*(0)$ . Mais  $w_1^*(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} \text{faible } w(t_p + h_{n_p}^1)$ ,  $w_2^*(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} \text{faible } w(t_p + h_{m_p}^1)$ , et l'égalité  $w_1^*(0) = w_2^*(0)$  est en contradiction avec l'inégalité (\*).

Cela achève la preuve du Théorème 4.2.

Nous passons maintenant à la preuve du Théorème 4.3.

Soit donc  $f(t)$  une fonction continue presque-périodique de  $\mathbf{R}$  dans  $H$ ,

et soit  $v(t)$  une fonction de  $\mathbf{R}$  dans  $H$  admettant pour tout  $t$  réel une représentation

$$v(t) = U(t)v(0) + \int_0^t U(t-\sigma)f(\sigma) d\sigma.$$

D'après l'hypothèse  $v(t)$  est aussi  $H$ -faiblement presque-périodique, et on veut démontrer que l'ensemble  $\{v(t)\}_{t \in \mathbf{R}} \subset H$  est relativement compact dans  $H$ .

En effet, dans le cas contraire, on trouve un nombre  $\alpha > 0$  et une suite de nombres réels  $\{h_n\}_1^\infty$ , telle que l'on ait

$$\|v(h_n) - v(h_m)\| > \alpha \text{ pour } n \neq m.$$

On peut aussi supposer, sans perdre la généralité, que l'on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(t+h_n) = \tilde{f}(t)$$

uniformément par rapport à  $t \in \mathbf{R}$ .

Comme dans le Lemme 4.1 on trouve la représentation

$$v(t+h_n) = U(t)v(h_n) + \int_0^t U(t-\sigma)f(\sigma+h_n) d\sigma.$$

Puisque la fonction  $v(t)$  est faiblement presque-périodique, elle est bornée et on peut encore supposer, sans léser la généralité que l'on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\text{faible}) v(h_n) = w \in H.$$

On déduit alors (cf. Lemme 4.1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\text{faible}) v(t+h_n) = U(t)w + \int_0^t U(t-\sigma)\tilde{f}(\sigma) d\sigma$$

(cette limite a lieu uniformément pour  $t$  variant dans un intervalle compact de la droite réelle).

$$\text{Posons maintenant } \tilde{v}(t) = U(t)w + \int_0^t U(t-\sigma)\tilde{f}(\sigma) d\sigma.$$

Alors,  $v(t)$  est faiblement presque-périodique et  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\text{faible}) v(t+h_n) = \tilde{v}(t)$ .

D'après Amerio-Prouse ([1] Ch. III, 2, IV), cette convergence est uniforme

$$\begin{aligned} \text{sur } \mathbf{R}, \tilde{v}(t) \text{ est aussi faiblement presque-périodique et on a } & \sup_{t \in \mathbf{R}} \|v(t)\| \\ = \sup_{t \in \mathbf{R}} \|\tilde{v}(t)\|. \end{aligned}$$

D'autre part, on voit que

$$\begin{aligned} v(t+h_n) - v(t+h_m) &= U(t)(v(h_n) - v(h_m)) \\ &+ \int_0^t U(t-\sigma)[f(\sigma+h_n) - f(\sigma+h_m)] d\sigma \end{aligned}$$

et par conséquent on obtient l'inégalité

$$\begin{aligned} \|v(t+h_n) - v(t+h_m)\| &\geq \|U(t)(v(h_n) - v(h_m))\| \\ - \left\| \int_0^t U(t-\sigma)[f(\sigma+h_n) - f(\sigma+h_m)] d\sigma \right\| &\geq \|v(h_n) - v(h_m)\| \\ - \int_0^t \|f(\sigma+h_n) - f(\sigma+h_m)\| d\sigma &\text{ (vu que } \|U(\tau)\| = 1, \tau \in \mathbf{R}) \end{aligned}$$

Ecrivons maintenant la loi du parallélogramme dans les espaces de Hilbert; on trouve l'égalité

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{2}(v(t+h_m) + v(t+h_n)) \right\|^2 + \left\| \frac{1}{2}(v(t+h_m) - v(t+h_n)) \right\|^2 \\ = \frac{1}{2}(\|v(t+h_m)\|^2 + \|v(t+h_n)\|^2). \end{aligned}$$

Si  $M = \sup_{t \in \mathbf{R}} \|v(t)\|$ , on voit que

$$\left\| \frac{1}{2}(v(t+h_m) + v(t+h_n)) \right\|^2 \leq M^2 - \frac{1}{4} \|v(t+h_m) - v(t+h_n)\|^2.$$

Utilisons maintenant l'inégalité

$$\|v(t+h_m) - v(t+h_n)\| \geq \alpha - \int_0^t \|f(\sigma+h_n) - f(\sigma+h_m)\| d\sigma,$$

en fixant une valeur de  $t$ ; alors pour  $n, m \geq N_t$ , on obtient

$$\alpha - \int_0^t \|f(\sigma+h_n) - f(\sigma+h_m)\| d\sigma > \frac{\alpha}{2};$$

on en déduit la majoration

$$\left\| \frac{1}{2}(v(t+h_m) + v(t+h_n)) \right\|^2 \leq M^2 - \alpha^2/16 \text{ si } m, n \geq N_t.$$

Maintenant, pour  $Z \in H$  fixé, de norme unité, on a la limite

$$\left( Z, \frac{v(t+h_m) + v(t+h_n)}{2} \right) \rightarrow (Z, \tilde{v}(t)) \text{ quand } m, n \rightarrow \infty.$$

On a aussi

$$\left| \left( Z, \frac{1}{2} (v(t+h_m) + v(t+h_n)) \right) \right| \leq \sqrt{M^2 - \alpha^2/16} \text{ si } m, n \geq N_t.$$

Donc

$$|(Z, \tilde{v}(t))| \leq \sqrt{M^2 - \alpha^2/16}; \text{ (pour } t \text{ arbitraire et } \|Z\| = 1).$$

Donc

$$\|\tilde{v}(t)\| \leq \sqrt{M^2 - \alpha^2/16}, t \in \mathbf{R}$$

et cela contredit la relation  $\sup_{t \in \mathbf{R}} \|\tilde{v}(t)\| = M$  établie précédemment.

Cela termine la preuve du Théorème 4.3.

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] AMERIO, L. and G. PROUSE. *Almost-periodic functions and functional equations*. Van Nostrand Reinhold Co., 1971.
- [2] BOCHNER, S. Abstrakte fast-periodische Funktionen. *Acta Math.* 61 (1933), pp. 149-183.
- [3] — Fast-periodische Lösungen der Wellen-Gleichung. *Acta Math.* 62 (1934).
- [4] COOKE, R. Almost-periodicity of bounded and compact solutions of differential equations. *Duke Math. J.* 36 (1969), pp. 273-276.
- [5] CORDUNEANU, C. *Almost-periodic functions*. Interscience Publishers, 1968.
- [6] PEROV, A. I. and TA KUANG HAI. On almost-periodic solutions of homogeneous differential equations. *Diferentsialnye Uravnenia* 8 (1972), pp. 453-458.
- [7] HILLE, E. and R. S. PHILLIPS. *Functional Analysis and Semi-Groups*. A. M. S. Colloquium publications, vol. 31, 1957.
- [8] LADAS, G. and V. LAKSHMIKANTHAM. *Abstract differential equations*. Academic Press, 1972.
- [9] YOSIDA, K. *Functional Analysis*. Springer Verlag, 1965.
- [10] ZAIDMAN, S. Sur la perturbation presque-périodique des groupes et semi-groupes de transformations d'un espace de Banach. *Rend. Matem. e sue Appl., S. V.*, 16 (1957), pp. 197-206.
- [11] — Solutions presque-périodiques dans le problème de Cauchy pour l'équation non-homogène des ondes (I, II). *Rend. Acc. Naz. Lincei* 30, mai-juin 1961.
- [12] — Solutions presque-périodiques des équations hyperboliques, *Annales Ecole Normale Supérieure Paris* 79 (1962), pp. 151-198.
- [13] — Teoremi di quasi-periodicità per alcune equazioni differenziali operazionali. *Rend. Sem. Mat. Fisico di Milano* 33 (1963).
- [14] — *Equations différentielles abstraites*. Les Presses de l'Université de Montréal, 1966.

(Reçu le 2 août 1977)

S. Zaidman

Département de Mathématique  
Université de Montréal  
Canada