

## 2. Application to the Poncelet problem

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **24 (1978)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## 2. APPLICATION TO THE PONCELET PROBLEM

We consider two smooth conics  $C$  and  $D$  meeting transversely at four points  $x_i$  ( $i=0, 1, 2, 3$ ) of the projective plane  $\mathbf{P}^2$ . The dual conic  $D^* \subset \mathbf{P}^{2*}$  consists of the tangent lines  $\xi$  to  $D$ , and we consider the incidence correspondence

$$E \subset C \times D^*$$

of pairs  $p = (x, \xi)$  with  $x \in \xi$  (c.f. Figure 1 above).  $E$  is the basic algebraic curve underlying the Poncelet construction, and we shall now examine it.

Referring again to Figure 1, there are on  $E$  a pair of involutions defined by

$$\begin{cases} i(x, \xi) = (x', \xi) \\ i'(x', \xi) = (x', \xi') \end{cases}$$

whose composition  $j = i' \circ i$  is given by  $j(x, \xi) = (x', \xi')$ . It follows that Poncelet's construction beginning at  $p = (x, \xi)$  gives a closed polygon of  $n$  sides if, and only if,

$$j^n(p) = p.$$

The mapping

$$(x, \xi) \rightarrow x$$

represents  $E \rightarrow C$  as a two-sheeted branched covering whose branch points are just the points  $x_i \in C \cap D$  ( $i=0, 1, 2, 3$ ), and the involution  $i'$  interchanges the sheets of this mapping (c.f. Figure 2 below). Similarly,  $i$  interchanges the two sheets of the mapping  $E \rightarrow D^*$  given by  $(x, \xi) \rightarrow \xi$  whose branch points are the four bitangents to the pair of conics. It follows that if we choose the origin to be  $\mathfrak{o} = (x_0, \xi_0)$  in Figure 2 below

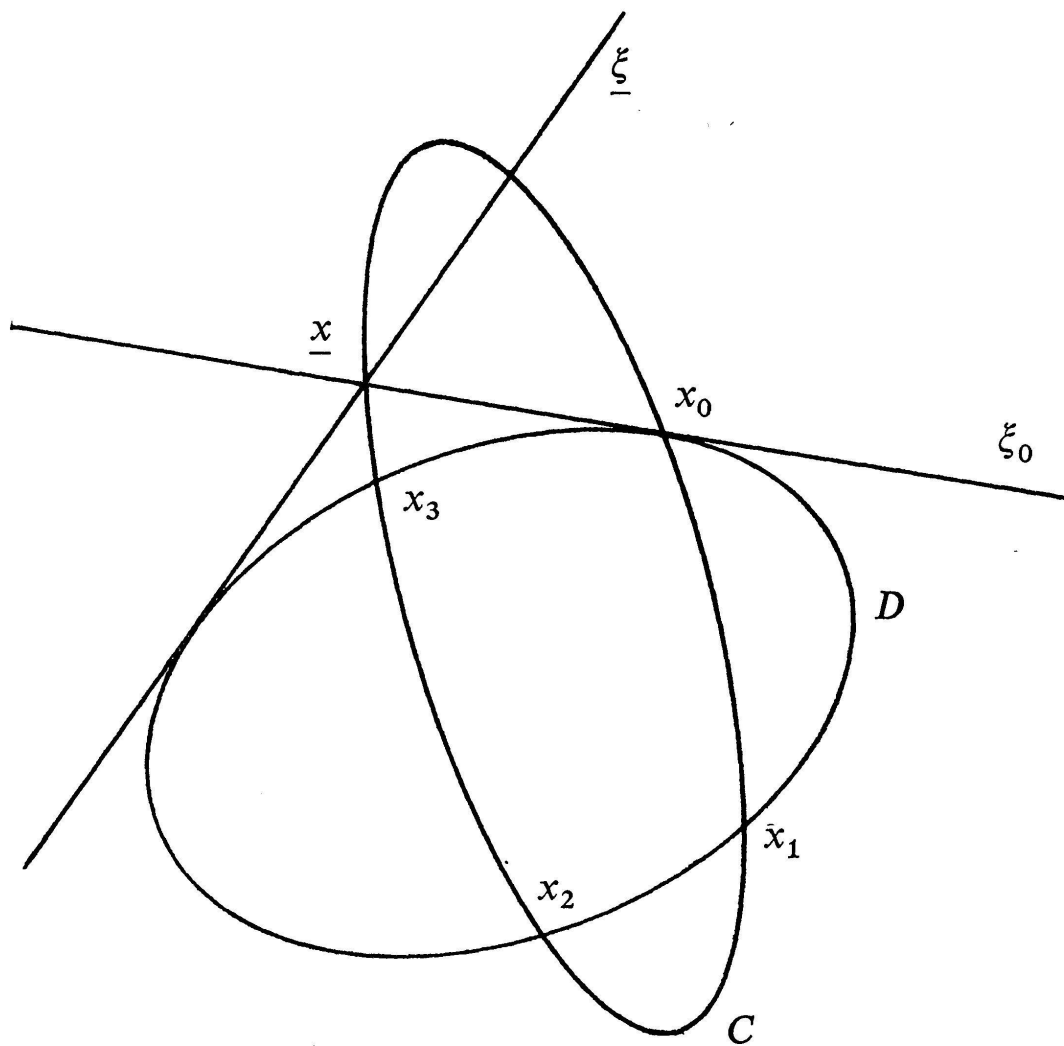


Figure 2

then  $E$  is an elliptic curve; i.e. a smooth algebraic curve of genus one with a marked point chosen as the identity for the group law. If we let  $p = (\underline{x}, \underline{\xi})$  in Figure 2, then the Poncelet theorem is:

*The Poncelet construction gives a closed polygon of  $n$  sides with arbitrary initial data  $q = (x, \xi) \in E$  if, and only if,*

$$(11) \quad np = \mathfrak{o}$$

*on the elliptic curve  $E$ .*

*Proof.* We want to show that (11) is equivalent to

$$j^n(q) = q$$

for an arbitrary point  $q \in E$ . On the universal covering  $C$  of  $E$  any involution  $i_1$  having at least one fixed point lifts to

$$\tilde{i}_1(u) \equiv -u + v \text{ modulo } \Lambda,$$

and  $i_1(\mathfrak{o}) = \mathfrak{o}$  is equivalent to  $v \in \Lambda$ . It follows that

$$\begin{cases} \tilde{i}(u) \equiv -u - w \text{ modulo } \Lambda \\ \tilde{i}'(u) \equiv -u \text{ modulo } \Lambda, \end{cases}$$

so that

$$\tilde{j}(u) \equiv u + w \text{ modulo } \Lambda,$$

and consequently

$$j^n(q) = q \Leftrightarrow nw \equiv 0 \text{ modulo } \Lambda.$$

Taking  $p$  to be the image of  $w$  in  $E = \mathbf{C}/\Lambda$ , we have

$$p = j(\mathfrak{o}) = (\underline{x}, \underline{\xi})$$

in Figure 2, which proves our assertion. Q.E.D.

To complete our story we want to combine this result with the explicit formula (10). As in the introduction we consider the pencil of conics

$$D_t = \{ t C(x) + D(x) = 0 \}$$

passing through the four base points  $x_i$ . The determinant  $\det(t C(x) + D(x))$  is a cubic polynomial in  $t$  with non-zero roots  $t_i$  ( $i=1, 2, 3$ ). For  $t \neq t_i$  we draw the tangent line to  $D_t$  through  $x_0$  meeting  $C$  in a unique residual point  $x(t)$ . It is easy to see that  $t = t_i$  is mapped into  $x_i$  (with suitable indexing), and since  $D_\infty = C$  the value  $t = \infty$  is mapped to  $x_0$ . Taking  $t = 0$  we see that  $t = 0$  corresponds to  $x$ , so that in summary:

*The elliptic curve  $E$  is birationally equivalent to the Riemann surface of the algebraic function  $\sqrt{\det(t C(x) + D(x))}$  with the origin  $\mathfrak{o}$  corresponding to  $t = \infty$  and the point  $p = (\underline{x}, \underline{\xi})$  to one of the two points lying over  $t = 0$ .*

Combining this with (10) gives Cayley's result stated in the introduction.

(Reçu le 27 juin 1977)

Phillip Griffiths  
Joseph Harris

Department of Mathematics  
Harvard University  
Cambridge, Mass. 02138

Department of Mathematics  
Massachusetts Institute  
of Technology  
Cambridge, Mass. 02138