

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 23 (1977)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LA  $(2p+1)$ -ÈME DÉVIATION D'UN ANNEAU LOCAL  
**Autor:** André, Michel  
**Kapitel:** Situation générique  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-48929>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 14.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

l'image de  $\hat{\pi}$  et du noyau de  $\hat{\eta}_{2p+1}$ , mentionnée précédemment, découle l'égalité de l'image de  $\pi$  et du noyau de  $\eta_{2p+1}$ . En particulier  $\eta_{2p+1}$  est un isomorphisme si et seulement si  $\pi$  est un homomorphisme nul.

### SITUATION GÉNÉRIQUE

Il faut considérer le  $K$ -module  $H_3[I]/J_3$ , autrement dit le  $K$ -module quotient

$$\text{Tor}_3^A(K, K)/\text{Tor}_2^A(K, K) \cdot \text{Tor}_1^A(K, K).$$

Il s'agit là du quotient  $H_2/H_1$ .  $H_1$  en homologie à la Koszul et un élément  $t$  du quotient de  $\text{Tor}_3$  par  $\text{Tor}_2$ .  $\text{Tor}_1$  est donc représentable par un élément  $g$  facile à expliciter à l'aide d'un système minimal de générateurs  $m_1, m_2, \dots, m_n$  de l'idéal maximal  $M$  de l'anneau local  $A$ . Ce représentant  $g$  a la forme

$$\sum \mu_{ij} dm_i \wedge dm_j \quad 1 \leq i < j \leq n$$

avec la condition usuelle de cycle pour  $1 \leq i \leq n$

$$\sum \mu_{ij} m_j = 0 \quad 1 \leq j \leq n$$

en posant  $\mu_{ii}$  égal à 0 et  $\mu_{ji}$  égal à  $-\mu_{ij}$ . Cela étant, avec un anneau  $B$ , il est naturel de considérer la  $B$ -algèbre  $Bn$  engendrée par les  $n(n+1)/2$  générateurs

$$x_i \text{ avec } 1 \leq i \leq n \quad \text{et} \quad y_{jk} \text{ avec } 1 \leq j < k \leq n$$

et soumise aux  $n$  relations pour  $1 \leq i \leq n$

$$\sum y_{ij} x_j = 0 \quad 1 \leq j \leq n$$

en posant  $y_{ii}$  égal à 0 et  $y_{ji}$  égal à  $-y_{ij}$ . Mais alors l'élément  $gn$

$$\sum y_{ij} dx_i \wedge dx_j \quad 1 \leq i < j \leq n$$

représente un élément important  $tn$  du quotient

$$\text{Tor}_3^{Bn}(B, B)/\text{Tor}_2^{Bn}(B, B) \cdot \text{Tor}_1^{Bn}(B, B).$$

L'homomorphisme utilisé de  $Bn$  dans  $B$  est l'unique homomorphisme de  $B$ -algèbres qui envoie les générateurs  $x_i$  et  $y_{jk}$  sur 0.

Les  $B$ -algèbres  $Bn$  et  $Zn \otimes_Z B$  sont isomorphes. Considérons une résolution simpliciale  $Pn(Z)$  de la  $Zn$ -algèbre  $Z$ . Comme le  $Z$ -module  $Zn$  est

libre, le produit tensoriel  $P_n(Z) \otimes_Z B$  est une résolution simpliciale  $P_n(B)$  de la  $B_n$ -algèbre  $B$ . Considérons encore les produits tensoriels importants

$$R_n(Z) = P_n(Z) \otimes_{Z_n} Z \text{ et } R_n(B) = P_n(B) \otimes_{B_n} B.$$

Les  $B$ -algèbres simpliciales  $R_n(Z) \otimes_Z B$  et  $R_n(B)$  sont alors isomorphes de manière élémentaire.

Considérons maintenant l'homomorphisme de l'anneau  $Z_n$  dans l'anneau  $A$  qui envoie les générateurs  $x_i$  sur les éléments  $m_i$  et les générateurs  $y_{jk}$  sur les éléments  $\mu_{jk}$ . Par nature, cet homomorphisme est appelé à varier. Au niveau des quotients de  $\text{Tor}_3$  par  $\text{Tor}_2$ .  $\text{Tor}_1$ , l'homomorphisme correspondant envoie l'élément générique  $tn$  sur l'élément quelconque  $t$  donné initialement. L'homomorphisme de  $Z_n$  dans  $A$  donne un homomorphisme de  $R_n(Z)$  dans  $R$ , donc un homomorphisme de  $R_n(K)$  dans  $R$ , par produit tensoriel.

En résumé, on a la  $K$ -algèbre simpliciale  $R$  qui donne lieu au complexe cotangent de la  $A$ -algèbre  $K$ , avec l'homomorphisme  $\pi$  correspondant, et la  $K$ -algèbre simpliciale  $R_n$  qui donne lieu au complexe cotangent de la  $Kn$ -algèbre  $K$ , avec l'homomorphisme  $\pi n$  correspondant. De plus il existe un homomorphisme de  $R_n$  dans  $R$  plaçant finalement  $tn$  au-dessus de  $t$  et  $\pi n$  au-dessus de  $\pi$ . En particulier l'homomorphisme  $\pi$  est nul en entier, si l'homomorphisme  $\pi n$  est nul sur l'élément générique. Il reste à préciser quel est l'élément  $\pi n(tn)$ . On peut localiser  $Kn$  sans rien changer, si on le désire. Enfin dénotons par  $Mn$  le noyau de l'homomorphisme de  $Kn$  sur  $K$ . L'idéal  $Mn$  a  $n(n+1)/2$  générateurs, alors que l'idéal  $M$  a  $n$  générateurs.

### CONCLUSION

Considérons une résolution libre et multiplicative  $\tilde{F}n$  de la  $Kn$ -algèbre  $K$  et dénotons par  $F_n$  le produit tensoriel  $\tilde{F}n \otimes_{Kn} K$  qui permet le calcul de  $\text{Tor}^{Kn}(K, K)$ . Dans la définition de l'homomorphisme  $\pi n$ , on peut remplacer les  $K$ -algèbres simpliciales  $R_n$  et  $\tilde{R}n$  par les  $K$ -algèbres différentielles  $F_n$  et  $\tilde{F}n$ . L'élément  $gn$  appartient alors à  $\tilde{F}n \otimes_{Kn} Mn$  et représente un élément de l'espace vectoriel

$$\text{Tor}_2^{Kn}(K, Mn) \cong \text{Tor}_3^{Kn}(K, K).$$