$$(1+x)^{\delta_1}(1-x^2)^{-\delta_2}\dots(1+(-1)^{n+1}x^n)^{(-1)^{n+1}\delta_n}$$

cette fois seulement si n est au plus $2p$. Mais comme δ_k et ε_k sont égaux pour $k < n$, il reste une égalité simple $\delta_n = \varepsilon_n + \omega_{n+1}$. Comme par ailleurs on a une inégalité $\varepsilon_n \geqslant \delta_n$ due à la surjectivité de η_n, cela ne se peut que sous la forme $\delta_n = \varepsilon_n$ (et η_n est un isomorphisme) et $\omega_{n+1} = 0$ (et η_{n+1} est un épimorphisme). On peut donc démontrer la condition C_n par induction sur $n \leqslant 2p+1$ et les nombres δ_n et ε_n sont égaux pour $n \leqslant 2p$ (ou quelconque en caractéristique nulle).

La 2p + 1-ème déviation

Nous venons de le constater, l'homomorphisme η_{2p+1} est une surjection. Par conséquent on a une première inégalité, à savoir $\varepsilon_{2p+1} \geqslant \delta_{2p+1}$. Ce qui a été fait ci-dessus pour $n \leqslant 2p$ peut être répété en partie pour $n = 2p+1$. Mais alors la dimension du n-ème module d'homologie de $S\,(I/I^2)$ est donné par le coefficient de x^{2p+1} dans la série modifiée suivante

$$(1+x)^{\delta_1}\dots(1-x^{2p})^{-\delta_{2p}}(1+x^{2p+1})^{\delta_{2p+1}+\delta_3}\ .$$

Cela conduit finalement à l'égalité simple

$$\delta_{2p+1} + \delta_3 = \varepsilon_{2p+1} + \omega_{2p+2}$$

Il en découle bien l'inégalité annoncée

$$\delta_{2p+1} \leqslant \varepsilon_{2p+1} \leqslant \delta_{2p+1} + \delta_3\ .$$

En particulier les homomorphismes η_{2p+1} et η_{2p+2} sont tous deux des isomorphismes dans le seul cas dégénéré où l'invariant δ_3 est nul. Il s'agit du cas où l'anneau local A, complété si nécessaire, est un anneau d'intersection complète, ce qui entraîne par ailleurs la nullité des déviations ε_i et des invariants δ_i pour $i \geqslant 3$. Il n'est pas exclu que l'on ait pourtant des égalités $\delta_{2p+1} = \varepsilon_{2p+1}$ et $\delta_{2p+2} = \varepsilon_{2p+2}$, sans isomorphisme, dans des cas non dégénérés.

De manière générale, considérons une K-algèbre simpliciale augmentée R d'idéal d'augmentation connexe I. On dénote par J le sous-espace produit $H\,[I].\,H\,[I]$ de $H\,[I]$, les puissances divisées n'intervenant pas car nous allons considérer des degrés impairs. Soit $\overline{K}$ une autre copie de K, opérant sur $H\,[I]$ grâce à l'homomorphisme identité et opérant sur K grâce à l'homomorphisme de Frobenius. On peut alors construire un homomorphisme utile π

$$K \otimes_{\bar{K}} H_3 [I]/J_3 \to H_{2p+1} [I]/J_{2p+1} .$$

Pour cela on considère un homomorphisme surjectif σ: $\tilde{R} \to R$, la K-algèbre simpliciale augmentée $\tilde{R}$ étant supposée acyclique. Un élément x du quotient H_3/J_3 est représenté par un élément de H_3, donc par un 3-cycle de I ou encore par une 3-chaîne de $\tilde{I}$ notée ξ. La p-ème puissance divisée du 2-bord $d\xi$ de $\tilde{I}$ est un $2p$-cycle de $\tilde{I}$, donc un $2p$-bord de $\tilde{I}$

$$\gamma^p (d\, \xi) = d\eta .$$

Il s'agit là d'un élément du noyau de σ. Par conséquent η représente un $2p+1$-cycle de I, donc un élément de H_{2p+1} ou encore un élément y du quotient H_{2p+1}/J_{2p+1}. Après les vérifications d'usage, on pose la définition $\pi (1 \otimes x) = y$. L'homomorphisme π étant défini, on n'oublie pas l'homomorphisme η_{2p+1}

$$H_{2p+1} [I]/J_{2p+1} \to H_{2p+1} [I/I^2]$$

défini lui aussi en toute généralité.

L'homomorphisme π est nul, lorsque le carré I^2 est nul. Par conséquent l'image de π est contenue dans le noyau de η_{2p+1} dans tous les cas. Parfois on obtient même une égalité. La théorie du produit symétrique montre que c'est bien le cas, lorsque la K-algèbre simpliciale augmentée R est égale à K-algèbre symétrique $S(L)$ d'un K-module simplicial connexe L. Il s'agira aussi d'une égalité dans le cas qui nous intéresse ici.

La K-algèbre simpliciale augmentée R est à nouveau celle donnant lieu au complexe cotangent. On sait surjectifs les homomorphismes canoniques de $H_k [I]$ dans $H_k [I/I^2]$ pour $0 \leqslant k \leqslant 2p+1$. On a donc des homomorphismes surjectifs de H_{2p+1} $[S^r (I)]$ dans H_{2p+1} $[S^r (I/I^2)]$ pour tout r. En utilisant le théorème de convergence et une induction sur r décroissant, on démontre alors que les homomorphismes canoniques de H_{2p+1} $[S^r (I)]$ dans $H_{2p+1}[I^r]$ sont eux aussi surjectifs. On a donc la situation suivante. L'injection canonique du K-module simplicial I dans la K-algèbre simpliciale R se prolonge en un homomorphisme de la K-algèbre simpliciale $\hat{R}$, égale à la K-algèbre simpliciale $S(I)$, dans la K-algèbre simpliciale R, le tout donnant lieu à des épimorphismes

$$H_{2p+1} [\hat{I}^r] \to H_{2p+1} [I^r]$$

en particulier pour r égal à 2. Grâce à cet épimorphisme, de l'égalité de l'image de $\hat{\pi}$ et du noyau de $\hat{\eta}_{2p+1}$, mentionnée précédemment, découle l'égalité de l'image de π et du noyau de η_{2p+1}. En particulier η_{2p+1} est un isomorphisme si et seulement si π est un homomorphisme nul.

Situation générique

Il faut considérer le K-module $H_3\,[I]/J_3$, autrement dit le K-module quotient

$$\mathrm{Tor}_3^A(K, K)/\mathrm{Tor}_2^A(K, K)\,.\;\mathrm{Tor}_1^A(K, K)\,.$$

Il s'agit là du quotient H_2/H_1. H_1 en homologie à la Koszul et un élément t du quotient de Tor_3 par Tor_2. Tor_1 est donc représentable par un élément g facile à expliciter à l'aide d'un système minimal de générateurs $m_1, m_2, \ldots, m_n$ de l'idéal maximal M de l'anneau local A. Ce représentant g a la forme

$$\Sigma\mu_{ij}\, dm_i \,\Lambda\, dm_j \qquad 1 \leqslant i < j \leqslant n$$

avec la condition usuelle de cycle pour $1 \leqslant i \leqslant n$

$$\Sigma\mu_{ij}\, m_j = 0 \qquad 1 \leqslant j \leqslant n$$

en posant μ_{ii} égal à 0 et μ_{ji} égal à $-\mu_{ij}$. Cela étant, avec un anneau B, il est naturel de considérer la B-algèbre Bn engendrée par les $n(n+1)/2$ générateurs

$$x_i \text{ avec } 1 \leqslant i \leqslant n \quad \text{et} \quad y_{jk} \text{ avec } 1 \leqslant j < k \leqslant n$$

et soumise aux n relations pour $1 \leqslant i \leqslant n$

$$\Sigma\, y_{ij}\, x_j = 0 \qquad 1 \leqslant j \leqslant n$$

en posant y_{ii} égal à 0 et y_{ji} égal à $-y_{ij}$. Mais alors l'élément gn

$$\Sigma y_{ij}\, dx_i \,\Lambda\, dx_j \qquad 1 \leqslant i < j \leqslant n$$

représente un élément important tn du quotient

$$\mathrm{Tor}_3^{Bn}(B, B)/\mathrm{Tor}_2^{Bn}(B, B)\,.\,\mathrm{Tor}_1^{Bn}(B, B)\,.$$

L'homomorphisme utilisé de Bn dans B est l'unique homomorphisme de B-algèbres qui envoie les générateurs x_i et y_{jk} sur 0.

Les B-algèbres Bn et $Zn \otimes_Z B$ sont isomorphes. Considérons une résolution simpliciale $Pn\,(Z)$ de la Zn-algèbre Z. Comme le Z-module Zn est