

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 23 (1977)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LA (2p+1)-ÈME DÉVIATION D'UN ANNEAU LOCAL  
**Autor:** André, Michel  
**Kapitel:** 2p + 1-ème déviation  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-48929>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 24.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

$$(1+x)^{\delta_1}(1-x^2)^{-\delta_2}\dots(1+(-1)^{n+1}x^n)^{(-1)^{n+1}\delta_n}$$

cette fois seulement si  $n$  est au plus  $2p$ . Mais comme  $\delta_k$  et  $\varepsilon_k$  sont égaux pour  $k < n$ , il reste une égalité simple  $\delta_n = \varepsilon_n + \omega_{n+1}$ . Comme par ailleurs on a une inégalité  $\varepsilon_n \geq \delta_n$  due à la surjectivité de  $\eta_n$ , cela ne se peut que sous la forme  $\delta_n = \varepsilon_n$  (et  $\eta_n$  est un isomorphisme) et  $\omega_{n+1} = 0$  (et  $\eta_{n+1}$  est un épimorphisme). On peut donc démontrer la condition  $C_n$  par induction sur  $n \leq 2p+1$  et les nombres  $\delta_n$  et  $\varepsilon_n$  sont égaux pour  $n \leq 2p$  (ou quelconque en caractéristique nulle).

### LA $2p+1$ -ÈME DÉVIATION

Nous venons de le constater, l'homomorphisme  $\eta_{2p+1}$  est une surjection. Par conséquent on a une première inégalité, à savoir  $\varepsilon_{2p+1} \geq \delta_{2p+1}$ . Ce qui a été fait ci-dessus pour  $n \leq 2p$  peut être répété en partie pour  $n = 2p+1$ . Mais alors la dimension du  $n$ -ème module d'homologie de  $S(I/I^2)$  est donné par le coefficient de  $x^{2p+1}$  dans la série modifiée suivante

$$(1+x)^{\delta_1}\dots(1-x^{2p})^{-\delta_{2p}}(1+x^{2p+1})^{\delta_{2p+1}+\delta_3}.$$

Cela conduit finalement à l'égalité simple

$$\delta_{2p+1} + \delta_3 = \varepsilon_{2p+1} + \omega_{2p+2}$$

Il en découle bien l'inégalité annoncée

$$\delta_{2p+1} \leq \varepsilon_{2p+1} \leq \delta_{2p+1} + \delta_3.$$

En particulier les homomorphismes  $\eta_{2p+1}$  et  $\eta_{2p+2}$  sont tous deux des isomorphismes dans le seul cas dégénéré où l'invariant  $\delta_3$  est nul. Il s'agit du cas où l'anneau local  $A$ , complété si nécessaire, est un anneau d'intersection complète, ce qui entraîne par ailleurs la nullité des déviations  $\varepsilon_i$  et des invariants  $\delta_i$  pour  $i \geq 3$ . Il n'est pas exclu que l'on ait pourtant des égalités  $\delta_{2p+1} = \varepsilon_{2p+1}$  et  $\delta_{2p+2} = \varepsilon_{2p+2}$ , sans isomorphisme, dans des cas non dégénérés.

De manière générale, considérons une  $K$ -algèbre simpliciale augmentée  $R$  d'idéal d'augmentation connexe  $I$ . On dénote par  $J$  le sous-espace produit  $H[I]$  de  $H[I]$ , les puissances divisées n'intervenant pas car nous allons considérer des degrés impairs. Soit  $\bar{K}$  une autre copie de  $K$ , opérant sur  $H[I]$  grâce à l'homomorphisme identité et opérant sur  $K$  grâce à l'homomorphisme de Frobenius. On peut alors construire un homomorphisme utile  $\pi$

$$K \otimes_{\bar{K}} H_3 [I]/J_3 \rightarrow H_{2p+1} [I]/J_{2p+1} .$$

Pour cela on considère un homomorphisme surjectif  $\sigma: \tilde{R} \rightarrow R$ , la  $K$ -algèbre simpliciale augmentée  $\tilde{R}$  étant supposée acyclique. Un élément  $x$  du quotient  $H_3/J_3$  est représenté par un élément de  $H_3$ , donc par un 3-cycle de  $I$  ou encore par une 3-chaîne de  $\tilde{I}$  notée  $\xi$ . La  $p$ -ème puissance divisée du 2-bord  $d\xi$  de  $\tilde{I}$  est un  $2p$ -cycle de  $\tilde{I}$ , donc un  $2p$ -bord de  $\tilde{I}$

$$\gamma^p (d\xi) = d\eta .$$

Il s'agit là d'un élément du noyau de  $\sigma$ . Par conséquent  $\eta$  représente un  $2p+1$ -cycle de  $I$ , donc un élément de  $H_{2p+1}$  ou encore un élément  $y$  du quotient  $H_{2p+1}/J_{2p+1}$ . Après les vérifications d'usage, on pose la définition  $\pi(1 \otimes x) = y$ . L'homomorphisme  $\pi$  étant défini, on n'oublie pas l'homomorphisme  $\eta_{2p+1}$

$$H_{2p+1} [I]/J_{2p+1} \rightarrow H_{2p+1} [I/I^2]$$

défini lui aussi en toute généralité.

L'homomorphisme  $\pi$  est nul, lorsque le carré  $I^2$  est nul. Par conséquent l'image de  $\pi$  est contenue dans le noyau de  $\eta_{2p+1}$  dans tous les cas. Parfois on obtient même une égalité. La théorie du produit symétrique montre que c'est bien le cas, lorsque la  $K$ -algèbre simpliciale augmentée  $R$  est égale à  $K$ -algèbre symétrique  $S(L)$  d'un  $K$ -module simplicial connexe  $L$ . Il s'agira aussi d'une égalité dans le cas qui nous intéresse ici.

La  $K$ -algèbre simpliciale augmentée  $R$  est à nouveau celle donnant lieu au complexe cotangent. On sait surjectifs les homomorphismes canoniques de  $H_k [I]$  dans  $H_k [I/I^2]$  pour  $0 \leq k \leq 2p+1$ . On a donc des homomorphismes surjectifs de  $H_{2p+1} [S^r (I)]$  dans  $H_{2p+1} [S^r (I/I^2)]$  pour tout  $r$ . En utilisant le théorème de convergence et une induction sur  $r$  décroissant, on démontre alors que les homomorphismes canoniques de  $H_{2p+1} [S^r (I)]$  dans  $H_{2p+1} [I^r]$  sont eux aussi surjectifs. On a donc la situation suivante. L'injection canonique du  $K$ -module simplicial  $I$  dans la  $K$ -algèbre simpliciale  $R$  se prolonge en un homomorphisme de la  $K$ -algèbre simpliciale  $\hat{R}$ , égale à la  $K$ -algèbre simpliciale  $S(I)$ , dans la  $K$ -algèbre simpliciale  $R$ , le tout donnant lieu à des épimorphismes

$$H_{2p+1} [\hat{I}^r] \rightarrow H_{2p+1} [I^r]$$

en particulier pour  $r$  égal à 2. Grâce à cet épimorphisme, de l'égalité de

l'image de  $\hat{\pi}$  et du noyau de  $\hat{\eta}_{2p+1}$ , mentionnée précédemment, découle l'égalité de l'image de  $\pi$  et du noyau de  $\eta_{2p+1}$ . En particulier  $\eta_{2p+1}$  est un isomorphisme si et seulement si  $\pi$  est un homomorphisme nul.

### SITUATION GÉNÉRIQUE

Il faut considérer le  $K$ -module  $H_3 [I]/J_3$ , autrement dit le  $K$ -module quotient

$$\mathrm{Tor}_3^A(K, K)/\mathrm{Tor}_2^A(K, K) \cdot \mathrm{Tor}_1^A(K, K).$$

Il s'agit là du quotient  $H_2/H_1$ .  $H_1$  en homologie à la Koszul et un élément  $t$  du quotient de  $\mathrm{Tor}_3$  par  $\mathrm{Tor}_2$ .  $\mathrm{Tor}_1$  est donc représentable par un élément  $g$  facile à expliciter à l'aide d'un système minimal de générateurs  $m_1, m_2, \dots, m_n$  de l'idéal maximal  $M$  de l'anneau local  $A$ . Ce représentant  $g$  a la forme

$$\sum \mu_{ij} dm_i \wedge dm_j \quad 1 \leq i < j \leq n$$

avec la condition usuelle de cycle pour  $1 \leq i \leq n$

$$\sum \mu_{ij} m_j = 0 \quad 1 \leq j \leq n$$

en posant  $\mu_{ii}$  égal à 0 et  $\mu_{ji}$  égal à  $-\mu_{ij}$ . Cela étant, avec un anneau  $B$ , il est naturel de considérer la  $B$ -algèbre  $Bn$  engendrée par les  $n(n+1)/2$  générateurs

$$x_i \text{ avec } 1 \leq i \leq n \quad \text{et} \quad y_{jk} \text{ avec } 1 \leq j < k \leq n$$

et soumise aux  $n$  relations pour  $1 \leq i \leq n$

$$\sum y_{ij} x_j = 0 \quad 1 \leq j \leq n$$

en posant  $y_{ii}$  égal à 0 et  $y_{ji}$  égal à  $-y_{ij}$ . Mais alors l'élément  $gn$

$$\sum y_{ij} dx_i \wedge dx_j \quad 1 \leq i < j \leq n$$

représente un élément important  $tn$  du quotient

$$\mathrm{Tor}_3^{Bn}(B, B)/\mathrm{Tor}_2^{Bn}(B, B) \cdot \mathrm{Tor}_1^{Bn}(B, B).$$

L'homomorphisme utilisé de  $Bn$  dans  $B$  est l'unique homomorphisme de  $B$ -algèbres qui envoie les générateurs  $x_i$  et  $y_{jk}$  sur 0.

Les  $B$ -algèbres  $Bn$  et  $Zn \otimes_Z B$  sont isomorphes. Considérons une résolution simpliciale  $Pn(Z)$  de la  $Zn$ -algèbre  $Z$ . Comme le  $Z$ -module  $Zn$  est